Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXV (1991) pgs. 81 - 94

UNA SOLUCION VIA EL METODO DE YAMABE DE UN PROBLEMA EN EL EXPONENTE CRITICO DE SOBOLEV

por

G. GARCIA[1], H.H. GOMEZ[2]
J. R. QUINTERO[3] y C.RODRIGUEZ[4]

§1 Introducción. En este artículo se probará que el siguiente problema semilineal elíptico con valores de frontera:

$$\begin{aligned} &\Delta u + \lambda u + u|u|^{2^*-2} = 0, && \text{en} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 5),\ \lambda > 0 \\ &u = 0, && \text{en} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \qquad (1.1)$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n (n \geq 5)$, $\lambda > 0$, tiene una solución u no trivial.

Este problema es muy interesante porque en $2^* = 2n/(n-2)$, el exponente crítico de Sobolev, la funcional asociada con esta ecuación no es Palais-Smale y el caso no puede abordarse directamente por métodos variacionales [Ni, p.277]. En [B-N] se demuestra que el problema 1.1 tiene una solución positiva en Ω, siempre y cuando $0<\lambda<\lambda_1$, donde λ_1 es el primer valor propio del Laplaciano en Ω, superando por primera vez la carencia de compacidad. En [C-F-P] se probó que el problema 1.1. tiene una solución no trivial para cada $\lambda > 0$. Con un enfoque diferente, [A-S] probaron un resultado similar.

---

1 Profesor Asociado, Universidad del Valle
2 Profesor Asistente, Universidad de los Andes
3 Profesor Asistente, Universidad del Valle
4 Profesor Titular, Universidad del Valle

En este trabajo probaremos por otro método el resultado de [C-F-P]. El método es el utilizado por primera vez en [Ya] para abordar el conocido *Problema de Yamabe.* Consiste en estudiar la familia de problemas que se obtiene reemplazando el exponente crítico 2* que aparece en 1.1 por un número menor. Teoremas tipo *paso de montaña* permiten demostrar la existencia de infinitas soluciones antes del exponente crítico (Veáse, por ejemplo, [G-G-Q-R1] donde vemos que este resultado se deduce del trabajo de [R1]); es natural, pues, conjeturar la existencia de infinitas soluciones en el exponente crítico. En este trabajo demostraremos que la solución con la energía más baja efectivamente converge cuando nos aproximamos al exponente crítico, a una solución no trivial de 1.1.

En [G-G-Q-R3] sugerimos una idea que podría conducir a la demostración de que soluciones de energía mayor definen efectivamente una familia infinita de soluciones de 1.1.

Los autores agradecen las conversaciones que sobre este problema han tenido con J. Escobar de Indiana University.

§2. Preliminares. En adelante Ω denota un dominio acotado en R^n con frontera suave, $n \geq 5$, $|\cdot|_p$ denota la norma del espacio de Banach $L_p(\Omega)$, $(p \geq 1)$, y $H_0{}^1(\Omega)$ es el completado de $C_0{}^\infty(\Omega)$ con respecto a la norma

$$|u|_0 = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{2.2}$$

Sea

$$S = inf \left\{\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 dx \,/\, \left(\int_\Omega \varphi^{2n/(n-2)} dx\right)^{(n-2)/n} : \varphi \in H_0^1(\Omega) - \{0\}\right\}$$

la mejor constante de Sobolev para la inclusión de $H_0^1(\Omega)\cdot$ en $L_{2^*}(\Omega)$ donde $2^* = 2n/(n-2)$ es el exponente crítico de Sobolev ([Au] [Ta]).

Sean $\varphi_1, \varphi_2 \ldots; \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3, \ldots,$ tales que

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_i = \lambda_i \varphi_i & \text{en} \quad \Omega, \\ \varphi_i \equiv 0 & \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

$|\varphi_i|_2 = 1$ y $|\nabla\varphi_i|_0^2 = |\varphi_i| = \lambda_i$. Además, $\{\varphi_i\}_{i\in N}$ es una base ortogonal de $H_0^1(\Omega)$.

Sean $\rho_0 > 0$ y $x_0 \in \Omega$ tal que $B_{2\rho_0}(x_0) \subseteq \Omega$; y sea $0 < \varepsilon < \rho_0$ un número que se determinará más adelante. Definamos la función

$$\varphi_\varepsilon(x) = \psi(x) u_{\varepsilon,x_0}(x),$$

donde $\psi(x)$ es una función continua a trozos y no decreciente de $|x-x_0|$, tal que $\psi(x) \equiv 1$ en $B_{\rho_0}(x_0)$, $\psi(x) \equiv 0$ en $\Omega - B_{2\rho_0}(x_0)$, $0 \leq \psi(x) \leq 1$ en Ω, $|\nabla\psi| < 1/\rho_0$ cuando $\rho_0 \leq |x-x_0| \leq 2\rho_0$ y

$$u_{\varepsilon,x_0}(x) = \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x-x_0|^2}\right]^{\frac{n-2}{2}}$$

Dado $\lambda > 0$, definamos $k_0 = mín\{k : \lambda < \lambda_k\}$ y

$$\varphi_{\varepsilon,k_0} = Pr_{\langle\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{k_0-1}\rangle^{\perp}_{L_2(\Omega)}} \varphi_\varepsilon(x).$$

Puede verse en [G-G-Q-R2] que $\varphi_{\varepsilon,k_0} \not\equiv 0$. Sea $H_{1k_0} = \langle\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_{k_0-1}, \varphi_{\varepsilon,k_0}\rangle$ y tomemos un conjunto ortogonal de funciones

$$\{\hat{\varphi}_{k_0+1}, \hat{\varphi}_{k_0+2}, \ldots\} \subseteq H_0^1(\Omega),$$

tales que

$$H_{1k_0} = \langle\hat{\varphi}_{k_0+1}, \hat{\varphi}_{k_0+2}, \ldots\rangle^{\perp}_{L_2(\Omega)}.$$

Definamos

$$H_{km} = (e_k, e_{k+1}, \ldots, e_m),$$

donde

$$e_i = \begin{cases} \varphi_i & 1 \leq i \leq k_0 - 1 \\ \varphi_{\varepsilon,k_0} & i = k_0 \\ \varphi_i & k_0 + 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Nótese que $dim\ H_{km} = m - k + 1$

Supongamos que $1 \leq q \leq n+2/n-2 = q_0$; sea $\Sigma_q = \{u \in H_0^1(\Omega): |u|_{q+1} = 1\}$ y $\Sigma_{q,km} = H_{km} \cap \Sigma_q$.

Consideremos la energía asociada con $\Delta + \lambda$, definida por

$$E_\lambda(u) = |\nabla u|_2^2 - \lambda |u|_2^2, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

$$E_{\lambda,km} = E_\lambda | H_{km}.$$

Puntos críticos de $E_{\lambda,km}$ tipo minimax cuando $1 < q < q_0$ se pueden encontrar variacionalmente así [R2]:

$$c_{q,k,m} = E_\lambda(u_{q,k,m}) = sup\{min_{u \in A} E_\lambda(u): A \in \mathfrak{F}\}$$

donde $\mathfrak{F} = \{A \subset \Sigma_{q,1m} : \gamma(A) \geq m - k + 1$, A compacto y simétrico de $H_0^1 - \{0\}\}$, con $m \geq k \geq k_0$ y $\gamma(A)$ denotando el índice topológico de A (ver [F-R]). Los valores críticos $c_{q,k,m}$ también se pueden caracterizar como

$$c_{q,k,m} = E_\lambda(u_{q,k,m}) = inf\{max_{u \in A} E_\lambda(u): A \in \mathfrak{G}\}$$

donde $\mathfrak{G} = \{A : A \subset \Sigma_{q,1m}, \gamma(A) \geq k, A$ compacto y simétrico de $H_0^1 - \{0\}\}$ (ver R2, p.50).

Además los puntos críticos $u_{q,k,m}$ $(m \geq k \geq k_0)$ satisfacen la igualdad

$$\int_\Omega \nabla u_{q,k,m} \cdot \nabla \zeta dx - \lambda \int_\Omega u_{q,k,m}\, \zeta dx$$

$$= c_{q,k,m} \int_\Omega |u_{q,k,m}|^{q-1} u_{q,k,m} \cdot \zeta\, dx \qquad (2\text{-}3)$$

para todo $\zeta \in H_{1m}$. Por otro lado se tiene:

TEOREMA 1. *Si* $m \geq k \geq k_0$ y $1 \leq q \leq q_0$, *entonces* $c_{q,k,m} \geq c_{q,k,m+1} > 0$.

Demostración. Ver Teorema 10 y observación final en [G-G-Q-R1].

OBSERVACION. Si $k \geq k_0$, entonces

$$c_{q,k,k} = máx_{u\in \Sigma_{q,k}} E_\lambda(u) \text{ y } c_{q,k,m} \leq c_{q,k,k}, \quad m \geq k.$$

donde $\Sigma_{q,k} = \Sigma_{q,kk}$. Definamos

$$c_{q,m} = inf_m\, c_{q,k,m}\,, \quad 1 \leq q \leq q_0.$$

De la observación se sigue que

$$c_{q_0,k_0} \leq máx_{u\in \Sigma_{q_0,k_0}} E_\lambda(u)$$

Modificando los argumentos usados en [C-F-P] se puede demostrar:

LEMA 1. *Si* $\varepsilon< \rho_0$ $(\rho_0$ *pequeño), entonces* $máx_{u\in \Sigma_{q_0,k_0}} E_\lambda(u) < S$.

Demostración. Para obtener este resultado utilizamos la desigualdad

$$\frac{E_\lambda(\varphi_{\varepsilon,k_0})}{|\varphi_{\varepsilon,k_0}|^2_{2^*}} < S + c\,\varepsilon^{n-2}\,\rho_0^{2-n} - \lambda c\,\varepsilon^2 + c\,\varepsilon^{n-2}\,\rho_0^4 + c\,\varepsilon^{n-2/2}\,\rho_0^2\,,$$

tomando $\varepsilon = \rho_0^{7/2}$ (ver [G-G-Q-R2], [Es]).

Concluimos los preliminares caracterizando los valores críticos tipo mínimax de $E_\lambda|_{\Sigma_q}$

TEOREMA 2. *Si* $k\geq k_0$ *y* $1\leq q < q_0$ *entonces* E_λ/Σ_q *posee un punto crítico* $u_{q,k}\in \Sigma_q$ *tal que* $c_{q,k} = E_\lambda(u_{q,k})$. *Además, satisface la igualdad*

$$\int_\Omega \nabla u_{q,k}\cdot \nabla\zeta\, dx - \lambda\int_\Omega u_{q,k}\,\zeta dx = c_{q,k}\int_\Omega |u_{q,k}|^{q-1} u_{q,k}\,\zeta\, dx \qquad (2\text{-}4)$$

para todo $\zeta\in H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Ver [G-G-Q-R1, observación final].

§3. El Método de Yamabe. Para cada $1 \le q < q_0$ y $k \ge k_0$ hemos encontrado $u_{q,k} \in H_0^1(\Omega)$ que satisface la igualdad 2.4. En esta sección vamos a extraer de la sucesión $\{u_{q,k_0}\}$ una subsucesión $\{u_{q_i,k_0}\}_i$ con $q_i \to q_0$, la cual converge débilmente a una función u_{q_0,k_0} en $H_0^1(\Omega)$. También probaremos que u_{q_0,k_0} satisface la igualdad

$$\int_\Omega \nabla u_{q_0,k_0} . \nabla \zeta dx - \lambda \int_\Omega u_{q_0,k_0} \zeta\, dx = c_{q_0,k_0} \int_\Omega |u_{q_0,k_0}|^{q_0-2} u_{q_0,k_0} \zeta dx \quad (3.5)$$

para todo $\zeta \in H_0^1(\Omega)$.

Sin pérdida de generalidad asumiremos que $m(\Omega) = \int_\Omega dx = 1$. Primero probamos algunos resultados técnicos.

LEMA 2. *Si $m \ge k_0$ y $q > p$ entonces $c_{q,k_0,m} \le c_{p,k_0,m}$.*

Demostración. Sea $\eta : \Sigma p \to \Sigma q$ el homeomorfismo impar $\eta(u) = \mu .|u|_{q+1}^{-1}$ entonces

$$c_{p,k_0,m} \ge \sup_{\substack{A \subset \sum_{p,1m} \\ \gamma(A) \ge m - k_0 + 1}} \min_{u \in A} E_\lambda(u) \ge \sup_{\substack{A \subset \sum_{p,1m} \\ \gamma(A) \ge m - k_0 + 1}} \min_{u \in A} E_\lambda(\eta(u)) \cdot |u|_{q+1}^2$$

Pero como $|u|_{q+1} \ge |u|_{p+1} = 1$ y $\gamma(\eta(A)) = \gamma(A)$,

$$c_{p,k_0,m} \ge \sup_{\substack{A \subset \sum_{p,1m} \\ \gamma(A) \ge m - k_0 + 1}} \min_{u \in A} E_\lambda(\eta(u)) \ge \sup_{\substack{A \subset \sum_{p,1m} \\ \gamma(A) \ge m - k_0 + 1}} \min_{\eta(u) \in A} E_\lambda(\eta(u))$$

$$\ge \sup_{\substack{\eta(A) \subset \sum_{q,1m} \\ \gamma(\eta(A)) \ge m - k_0 + 1}} \min_{\eta(u) \in A} E_\lambda(\eta(u)) \ge c_{q,k_0,m}.$$

Del Lema anterior y el Teorema 1 se sigue que,

COROLARIO 1. *Si $m \ge k_0$ y $q > p$, entonces $0 < c_{q,k_0} \le c_{p,k_0}$.*

Un resultado básico para la demostración del teorema principal es el

LEMA 3. $\lim\limits_{q \to q_0} c_{q,k_0} = c_{q_0,k_0}$.

Primero demostraremos un resultado de carácter general,

TEOREMA 3. *Supongamos que* J: $[a,b] \times A \to \mathbf{R}$ *es continua, donde* A *es compacto, entonces la función:*

$$J_A: [a,b] \to \mathbf{R}$$

definida por $J_A(q) = min_{\mu \in A} J(q,u)$ *es continua.*

Demostración. Sea $q_n \to q$. Probaremos que $J_A(q_n) \to J_A(q)$. De la definición de J_A, para cada n, existe $u_{q_n} \in A$, tal que,

$$J_A(q_n) = J(q_n, u_{q_n}) \leq J(q_n, u) \text{ para todo } u \in \text{A}. \qquad (3.6)$$

Como $[a,b] \times A$ es compacto, existe $\{n_k\} \subset \{n\}$ tal que,

$$(q_{n_k}, u_{q_{n_k}}) \to (q, u_q)$$

y

$$J_A(q_{n_k}) = J(q_{n_k}, u_{q_{n_k}})$$

Tomando límite cuando $k \to \infty$ y usando la continuidad de J,

$$\lim_{k \to \infty} J_A(q_{n_k}) = J(q, u_q)$$

Demostraremos que $J_A(q) = J(q, u_q)$. Para ello supongamos que $J_A(q) = J(q, \overline{u})$. De la definición de J_A y 3.6,

$$J_A(q_{n_k}) = J(q_{n_k}, u_{n_k}) \leq J(q_{n_k}, \overline{u});$$

de donde

$$\lim_{k \to \infty} J_A(q_{n_k}) = J(q, u_q) \leq J(q, \overline{u}).$$

Por otro lado se tiene que,

$$J_A(q) = J(q, \overline{u}) \leq J(q, u_{q_{n_k}}).$$

Tomando límite cuando $\text{k} \to \infty$,

$$J(q, \overline{u}) = J_A(q) \leq J(q, u_q)$$

Por lo tanto, $J(q,\bar{u}_q) = J(q,\bar{u})$. Realmente hemos probado que para cada $q_n \to q$ existe q_{n_k} tal que

$$\lim_{n \to \infty} J_A(q_{n_k}) = J_A(q) \ . \tag{3.7}$$

Para concluir la prueba supongamos que $lim_{k\to\infty} J\ (q_{n_k}) = L$. Claramente $|L| < +\infty$. Sea $\{q_{n_{k'}}\} \subset \{q_{n_k}\}$. Entonces $lim_{k'\to\infty} J_A(q_{n_{k'}}) = L$. Utilizando 3.7. se sigue que

$$\lim_{k' \to \infty} J_A(q_{n_{k'}}) = J_A(q).$$

Demostración del Lema 3.4. Del Teorema 3 y las dos caracterizaciones de $c_{q,k_0,m}$ se sigue que $c_{q,k_0,m}$ es continua cuando $1 \le q \le q_0$ y $m \le k_0$. Por lo tanto,

$$c_{q,k_0} = \inf_m c_{q,k_0,m}$$

es semicontinua superiormente. Como c_{q,k_0} es decreciente en q el resultado se obtiene.

El siguiente Teorema da el criterio de Aubin [Au] para encontrar soluciones no triviales al problema 1.1.

TEOREMA 4. $0 < c_{q_0,k_0} < S$.
Demostración. La primera parte de la desigualdad $c_{q_0,k_0} > 0$ se puede ver en [G-G-Q-R2, Teorema 2]. Para la otra parte notemos que

$$c_{q_0,k_0} \le c_{q_0,k_0,k_0} = max_{u \in \Sigma_{q,1k_0}} E_\lambda(u).$$

Del Lema 1, $\max_{u \in \Sigma_{q,1k_0}} E_\lambda(u) < S$; de modo que, $0 < c_{q_0,k_0} < S$.

TEOREMA 5. *Si* $1 \le q < q_0$, *la sucesión* $\{u_{q,k_0}\}_q$ *es acotada en* $H_0^1(\Omega)$.
Demostración. Tomando $\zeta = u_{q,k_0}$ en la igualdad 2.4. obtenemos:

$$\begin{aligned}
|\nabla u_{q,k_0}|_2^2 &= \lambda |u_{q,k_0}|_2^2 + c_{q,k_0} |u_{q,k_0}|_{q+1}^{q+1} \\
&= \lambda |u_{q_0,k_0}|_2^2 + c_{q,k_0} \\
&\leq \lambda + c_{q,k_0} \\
&\leq \lambda + c_{1,k_0}
\end{aligned}$$

dado que $m(\Omega) = 1$ y c_{q,k_0} es decreciente en q.

TEOREMA 6. *La sucesión* $\{u_{q,k_0}\}_q$ *posee una subsucesión* $\{u_{q_i,k_0}\}_i$ *que converge débilmente a* u_{q_0,k_0} *en* $H_0^{\,1}(\Omega)$ *cuando* $q_i \to q_0$.

Por el Teorema 5, $\{u_{q,k_0}\}$ es acotada en $H_0^{\,1}(\Omega)$ y por lo tanto es relativamente compacta. Entonces existe una subsucesión $\{u_{q_0,k_0}\}_i$ y $u_{q_0,k_0} \in H_0^{\,1}(\Omega)$ tales que

(i) $u_{q_i,k_0} \to u_{q_0,k_0}$ débilmente en $H_0^{\,1}(\Omega)$

(ii) $u_{q_i,k_0} \to u_{q_0,k_0}$ fuertemente en $L_p(\Omega)$

(iii) $u_{q_i,k_0} \to u_{q_0,k_0}$ c.t.p. en(Ω)

cuando $q_i \to q_0$.

Puesto que u_{q_i,k_0} es un punto crítico de $E_\lambda|_{\Sigma_{q_i}}$ tenemos que: $|u_{q_i}|_{q_i+1} = 1$, y por 2.4.

$$\int_\Omega \nabla u_{q_i,k_0} . \nabla\zeta - \lambda \int_\Omega u_{q_i,k_0} . \zeta = c_{q_i,k_0} \int_\Omega |u_{q_i,k_0}|^{q_i-1} . u_{q_i,k_0} . \zeta$$

para todo $\zeta \in H_0^{\,1}(\Omega)$. Del teorema 3.45 de [Au] se sigue que $|u_{q_i,k_0}|^{q_i-1} . u_{q_i,k_0}$ converge débilmente a $|u_{q_0,k_0}|^{q_0-1} u_{q_0,k_0}$ en $L_{q_0+1/q_0}(\Omega)$, pues

$$|u_{q_i,k_0}|^{q_i-1} . u_{q_i,k_0} \to |u_{q_0,k_0}|^{q_0-1} . u_{q_0,k_0} \quad \text{c.t.p en } \Omega$$

y

$$\begin{aligned}
\| u_{q_i,k_0}|^{q_i}|_{q_0+1/q_0} &= |u_{q_i,k_0}|^{q_i}_{\frac{q_i(q_0+1)}{q_0}} \\
&\leq |u_{q_i,k_0}|^{q_i}_{q_0+1} \\
&\leq C|\nabla u_{q_i,k_0}|^{q_i}_2 \\
&\leq C'(\text{por el teorema } 5).
\end{aligned}$$

Si hacemos $q_i \to q_0$, utilizando (i), (ii), lema 3, y la observación anterior obtenemos:

$$\int_\Omega \nabla u_{q_0,k_0} \cdot \nabla\zeta - \lambda \int_\Omega u_{q_0,k_0} \cdot \zeta = c_{q_0,k_0} \int_\Omega |u_{q_0,k_0}|^{q_0-1} \cdot u_{q_0,k_0} \cdot \zeta,$$

para todo $\zeta \in H_0{}^1(\Omega)$.

De los Teoremas 4 y 6 podemos deducir el

TEOREMA 7. *La función* $u_{q_0,k_0} \not\equiv 0$.

Demostración. Como sabemos: $c_{q_0,k_0} = lim_{q\to q_0} c_{q,k_0} < S$. Luego, existe $q_1 < q_0$ tal que para $q_1 \leq q \leq q_0$ se tiene que $c_{q,k_0} < S$. De 2.4. tomando $\zeta = u_{q,k_0}$ obtenemos

$$|\nabla u_{q,k_0}|_2^2 - \lambda |u_{q,k_0}|_2^2 = c_{q,k_0}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\lambda |u_{q,k_0}|_2^2 &= |\nabla u_{q,k_0}|_2^2 - c_{q,k_0} \\
\lambda |u_{q,k_0}|_2^2 &\geq S\,|u_{q,k_0}|^2_{q_0+1} - c_{q,k_0} \\
&\geq S - c_{q,k_0} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Del Teorema 6 (ii), $u_{q_0,k_0} \to u_{q_0,k_0}$ fuertemente en $L_2(\Omega)$, entonces $|u_{q_0,k_0}|_2 > 0$. Así $u_{q_0,k_0} \not\equiv 0$.

TEOREMA 8. (Teorema Principal). *El problema 1.1. posee un par de soluciones no triviales.*

Demostración. Sea $v_{q_0,k_0} = [c_{q_0,k_0}]^{1/q_0-1} u_{q_0,\,k_0}$. Entonces $v_{q_0,\,k_0}$ satisface la igualdad

$$\int_\Omega \nabla v_{q_0,\,k_0} \cdot \nabla\zeta - \lambda \int_\Omega v_{q_0,k_0} \cdot \zeta = \int_\Omega |v_{q_0,k_0}|^{q_0-1} \cdot v_{q_0,k_0} \cdot \zeta,$$

para todo $\zeta \in H_0^{\,1}(\Omega)$. Por lo tanto v_{q_0,k_0} es una solución débil no trivial del problema 1.1. La regularidad de esta solución es consecuencia del lema de Brezis-Kato [Br, p.178]. Nótese que $-v_{q_0 k_0}$ es también una solución del problema.

REFERENCIAS

[A-S] Ambrosetti A. and Struwe M., *A Note on the Problem* $-\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-2}u.$, (Preprint)

[Au] Aubin T., *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampére Manifolds. Monge-Ampére Equations.* Springer Verlag, 1980.

[Br] Brezis H., *Some Variational Problems with Lack of Compactness,* Proc. Sym. Pure Mathem., Vol. 45 (1986), Part 1, pp. 165-201.

[B-N] Brezis H. and Nirenberg, L., *Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents,* Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXXVI, pp. 437-447 (1983).

[C-F-P] Capozzi A., Fortunato D., Palmieri G., *An Existence Result for Non-linear Elliptic Problems Involving Critical Sobolev Exponent,* Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 2, No. 6, (1985), pp. 463-470.

[Es] Escobar J., *Positive Solutions for Some Semilinear Elliptic Equations with Critical Sobolev Exponents,* Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XL, 623-657 (1987)

[F-R] Fadell E.R. and Rabinovitz, P., *Bifurcation for Odd Potential Operators and a Alternative Topological Index,* J. Func. Anal. 26 (1977), 48-67.

[G-G-Q-R1] García G., Gómez H., Quintero, J.R. y Rodríguez C., *Infinitas Soluciones a un Problema Semilineal Elíptico antes del Exponente Crítico de Sobolev,* (Sometido para publicación).

[G-G-Q-R2] García G., Gómez H., Quintero, J. R. y Rodríguez C., *A Lagrange Multipliers Problem in the Critical Exponents of Sobolev* (sometido para publicación).

[G-G-Q-R3] García G., Gómez H., Quintero, J.R. y Rodríguez C., *Funcionales no Compactas y Puntos Críticos,* Rev. Fac. de Ciencias, Univalle, No. 3 (Aparece Enero de 1991).

[Ni] Nirenberg L., *Variational and Topological Methods in Nonlinear Problems,* Bulletin of Am. Math. Soc., Vol. 4, Num.3, (1981), pp. 267-302.

[R1] Rabinowitz, P., *Minimax Methods for Nonlinear Elliptic Eingenvalue Problems,* Indiana University Journal, Vol. 23, No. 8 (1974) pp. 729-754

[R2] Rabinowitz, P., *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations,* CBMS, AMS, 1984.

[Ta] Talenti G., *Best Constants in Sobolev Inequality,* Annali di Mat., 110, (1976), pp. 353-372.

[Tr] Trudinger N., *Remarks concerning the conformal Deformation of of Riemannian Structures on Compact Manifolds,* Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa (3), 22 (1986), 265-274.

[Ya] Yamabe H., *On Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds,* Osaka Math. J. 12 (1960), pp. 21-37.

Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle
A.A. 25360
CALI, COLOMBIA.

(Recibido en octubre de 1990).