6. - Un conjunto no enumerable de medida nula.

Sea $R = \{ x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots \}$ el conjunto de todos los números racionales del intervalo $[0, 1]$. Para cada $x_k \in R$ consideremos la vecindad abierta $V_{k,n}$ del centro x_k y radio $1/(2^{k+2}\, n)$. Definimos

$$(1) \qquad A^{(n)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{k,n} \quad (n = 1, 2, \ldots\ldots)$$

Es claro que entonces

$$(2) \qquad \overline{m}(A^{(n)}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \overline{m}(V_{k,n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} (1/2^{k+2}) = \frac{1}{n}$$

Además se tiene la sucesión

$$(3) \qquad A^{(1)} \supset A^{(2)} \supset A^{(3)} \supset \ldots\ldots \supset A^{(k)} \supset \ldots \supset R$$

Por tanto,

$$0 = \overline{m}(R) \leq \overline{m}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \right) \leq \overline{m}(A^{(n)}) = \frac{1}{n}$$

para todo $n = 1, 2, \ldots\ldots$ Es decir, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A^{(n)}$ tiene medida nula.

Intuitivamente A sólo parece contener los elementos de R ya que los radios de las vecindades que aparecen en (1) decrecen cuando n crece y en definitiva parecen quedar únicamente los centros de estas vecindades; es decir, parece que A se redujera a R. Sin embargo mostramos en seguida que A contiene un número no enumerable de números irracionales al mostrar que A no es enumerable.

En efecto: supongamos que A es enumerable. Sea entonces I una componente conexa del conjunto $A^{(1)}$; como I es un conjunto no enumerable existe por lo menos un $x \in I$ tal que

$$x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A^{(n)}$$

Es decir, existe un entero n tal que $x \notin A^{(n)}$. Por tanto, existen por lo menos dos componentes conexas diferentes de $A^{(n)}$ que están contenidas en I, ya que $A^{(n)}$ es denso en toda parte de $[0, 1]$.

Sean I_0, I_1, estas dos componentes ($I \supset I_0, I_1$; ver figura 1).

De la misma manera existen dos componentes diferentes de $A^{(s)}$ $(s > n)$, I_{00}, I_{01}, tales que están contenidas en I_0 y también dos componentes de $A^{(t)}$ $(t > n)$, I_{10}, I_{11} que están contenidas en I_1. De manera recurrente obtenemos las siguientes sucesiones de intervalos :

$$
(4) \qquad I \supset \begin{cases} I_0 \supset \begin{cases} I_{00} \supset \begin{cases} I_{000} \cdots \\ I_{001} \cdots \end{cases} \\ I_{01} \supset \begin{cases} I_{010} \cdots \\ I_{011} \cdots \end{cases} \end{cases} \\ I_1 \supset \begin{cases} I_{10} \supset \begin{cases} I_{100} \cdots \\ I_{101} \cdots \end{cases} \\ I_{11} \supset \begin{cases} I_{110} \cdots \\ I_{111} \cdots \end{cases} \end{cases} \end{cases}
$$

De acuerdo con (3), es evidente que la intersección (total) de

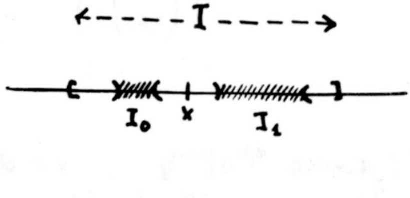

Figura 1.

cada una de las sucesiones que aparecen en (4) (por ejemplo,

$$I \supset I_0 \supset I_{01} \supset I_{010} \supset I_{0101} \supset \ldots\ldots$$

(5)

$$I \cap I_0 \cap I_{01} \cap I_{010} \cap I_{0101} \cap \ldots)$$

no es vacía y está contenida en A. Además, un elemento de A no puede pertenecer a dos intersecciones del tipo (5), dada la construcción de las sucesiones. Por consiguiente, hemos establecido una correspondencia entre las sucesiones de intervalos que aparecen en (4) y puntos del conjunto A. Pero el conjunto de las sucesiones que aparecen en (4) es equivalente al conjunto de todos los números del sistema binario; luego no es enumerable, lo cual contradice la hipótesis de que A es enumerable.

YU TAKEUCHI, UNAL.

(Febrero, 1964)