PROBLEMAS PROPUESTOS

131. - Demostrar que :

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{8y^3} > \frac{1}{2x^2y} + \frac{1}{4xy^2}$$

si $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 2y$.

132. - Usando la identidad

$$\sum_{m=1}^{n+1} m^k = \sum_{m=1}^{n+1} ((m-1) + 1)^k$$

deducir :

(a) $\sum_{m=1}^{n} m = n(n+1)/2$

(b) $\sum_{m=1}^{n} m^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

(c) $\sum_{m=1}^{n} m^3 = n^2(n+1)^2/4$

133. - Sea p un número primo. a) Demostrar que

$$p^{n+1} \mid \binom{p}{k} p^{n(p-k)}$$

si $0 < k < p$.

b) Usando que $p^{n+1} \mid p^{np}$ para $p \geq 1$, y la parte a), demostrar que si $a \equiv b \pmod{p^n}$ entonces $a^p \equiv b^p \pmod{p^{n+1}}$. (Indicación :

use el desarrollo de $a^p = (b + hp^n)^p$.)

134. - Muestre que la ecuación diofántica

$$(1) \qquad x^2 - y^2 = N$$

tiene solución en enteros positivos (≥ 0) si y sólo si N es impar ó divisible por 4.

Muestre, además, que la solución es única si y sólo si $N = 1$ ó $N/4$ es un número primo. (Indicación : factorice el miembro izquierdo de la relación (1).)

135. - Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros.

Mostrar entonces que si $a \equiv b \pmod m$ se tiene $f(a) \equiv f(b) \pmod m$.

Si, además $f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n \equiv 0 \pmod m$ para los m valores consecutivos de la variable $a + k$, $k = 1, \ldots, m$, mostrar entonces que $f(x) \equiv 0 \pmod m$ para todo valor entero x.