109. - Para un número real x, sea $\operatorname{sgn} x = x/|x|$, si $x \neq 0$, y $\operatorname{sgn} x = 0$ si $x = 0$. Demostrar la identidad

(1) $\quad (\operatorname{sgn} x)(1 + \operatorname{sgn}(x - y)\operatorname{sgn} y) = \operatorname{sgn} y + \operatorname{sgn}(x-y)$

Solución. - Dividamos el problema en varios casos :

a) si $x = 0$, el primer miembro de la igualdad es cero, así como también el segundo, porque

$$\operatorname{sgn} y + \operatorname{sgn}(x-y) = \operatorname{sgn} y + \operatorname{sgn}(-y) = 0.$$

b) Si $y = 0$, tanto el primero como el segundo miembro de la igualdad se reducen a $\operatorname{sgn} x$.

c) Si $x, y \neq 0$ y $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} y$, tenemos :

$$\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn}(x-y)(\operatorname{sgn} y)(\operatorname{sgn} x) = \operatorname{sgn} y + \operatorname{sgn}(x-y)(\operatorname{sgn} x) =$$

$$= \operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn}(x-y) = \operatorname{sgn} y + \operatorname{sgn}(x-y)$$

d) Si $x, y \neq 0$ y $\operatorname{sgn} x \neq \operatorname{sgn} y$, tenemos que considerar todavía dos casos : $\operatorname{sgn} x = 1$ y $\operatorname{sgn} y = -1$. Si $\operatorname{sgn} x = 1$, tenemos que el primer miembro se reduce a $1 - \operatorname{sgn}(x-y) = 1 - 1 = 0$, porque debe tenerse que $x - y > 0$ (ya que $\operatorname{sgn} x \neq \operatorname{sgn} y$); y el segundo miembro deviene $-1 + \operatorname{sgn}(x-y) = -1 + 1$. Si $\operatorname{sgn} x = -1$, el primer miembro se reduce a $-1 - \operatorname{sgn}(x-y) = -1-(-1) = 0$, ya que $\operatorname{sgn}(x-y) = -1$ (porque de otra manera $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} y$), y el segundo en $1 + \operatorname{sgn}(x-y) = 1 + (-1) = 0$.

La reunión de a), b), c) y d) demuestra pues la identidad (1).

JOSE FRANCISCO CAICEDO.

122. - Demostrar que para $n > 4$ se tiene

$$2^n > n^2$$

Solución. - Se demuestra por inducción completa sobre n : para $n = 5$, tenemos la desigualdad

$$2^5 = 32 > 5^2 = 25$$

Supongamos que la fórmula es válida para $n = k$, y demostremos la validez de ella para $n = k + 1$. Tenemos la relación

(1) $$2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} > 1 + 2k$$

Por otra parte, tenemos que $2^{k+1} = 2^k(1+1) = 2^k + 2^k$, luego

$$2^{k+1} = 2^k + 2^k > k^2 + 1 + 2k = (k+1)^2$$

en virtud de la hipótesis de inducción y la desigualdad (1). La desigualdad propuesta es, pues, válida para todo $n > 4$.

RICARDO PLATA T.

123. - Demostrar que para $h > -1$ y n entero positivo se tiene

(1) $$(1 + h)^n \geqq 1 + nh$$

Solución. - La demostración de la desigualdad (1) se efectúa realizando inducción completa sobre el número natural n. Para $n = 0, 1$ la desigualdad es trivial ya que ambos miembros son iguales. Supongamos ahora que es válida para $n = k$; entonces multiplicando ambos miembros de la desigualdad

$$(1 + h)^k \geqq 1 + kh$$

por $(1 + h)$ (> 0), obtenemos

$$(1 + h)^{k+1} \geqq (1 + kh)(1 + h) = 1 + h + kh + h^2 k.$$

Dado que k es un número natural tenemos que $h^2 k \geqq 0$, y, por tanto,

$$(1 + h)^{k+1} \geq 1 + h + hk = 1 + (1+k)h,$$

tal como queríamos demostrar.

RICARDO PLATA T.

124. - El error en la demostración del teorema propuesto en el problema 124 se encuentra en el hecho de que si bien para $n = 1$ el "teorema es cierto", no se debe concluir que es cierto para $n = 2$, como no lo es en efecto.

ALUMNOS AÑO PRIMERO.
Fac. de Matemáticas, UNAL.

125. - Se tiene un cono recto de revolución de vértice S, radio de la base R y altura h; se corta este cono por un plano P paralelo al plano de la base, a una distancia X del vértice S.

a) Demostrar que la sección (c) así obtenida es un círculo y calcular su radio en función de R, h y X.

b) Calcular el área total Y del cilindro de revolución que tiene una de sus bases en la base del cono, siendo la otra base el círculo (c). ¿Qué condición debe satisfacer h para que Y sea primero creciente y luego decreciente cuando X crece de 0 a h?

c) Pongamos de ahora en adelante $h = 3R$. Construir la gráfica que representa las variaciones de Y en función de X; determinar las tangentes en sus puntos extremos.

d) Determinar X para que Y tenga el valor dado $2a$. ¿Para qué valores de a tiene el problema dos soluciones X_1, X_2?. Calcular en este caso, en función de R y de a, la suma de los volúmenes de los dos cilindros correspondientes.

Solución. - a) Sea Q un punto de la sección obtenida. Prolonguemos SQ' hasta encontrar el plano P' (figura 1) en Q'. Tracemos $O'S$, el cual es perpendicular tanto a P como a P'; por tanto, OQ y $O'Q'$ son perpendiculares a $O'S$; es decir, los triángulos OQS y $O'Q'S$ son rectángulos y semejantes. Luego la razón

$$r/R = OQ/O'Q' = k$$

es constante, y $r = OQ = kR$. Luego la sección es un círculo de

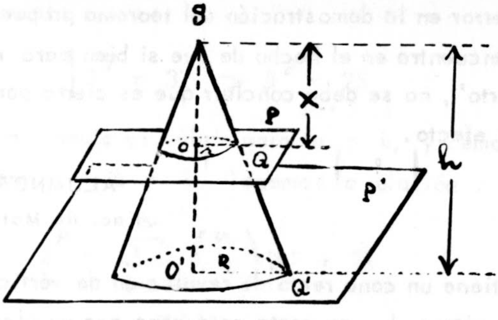

FIGURA 1

centro O ya que la longitud OQ es constante para cada punto Q de la sección.

Hallemos el valor de k: tenemos que $k = r/R = X/h$; es decir, r en función de h, R y X esté dado por

(1) $$r = RX/h$$

b) El área total Y del cilindro considerado (figura 2) está dada por

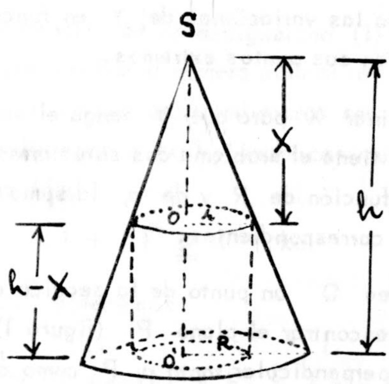

FIGURA 2

(2) $$Y = 2\pi R(h^2X + (R - h)X^2)/h^2$$

Consideremos la derivada de Y con respecto a X:

$$Y' = 2\pi R(h^2 + 2(R - h)X)/h^2$$

Para que la función sea primero creciente y después decreciente cuando $0 \leq X \leq h$, basta que $Y' = 0$ en algún punto del intervalo $0 \leq X \leq h$. Si $R \geq h$, es claro que $Y' > 0$, y, por tanto, Y' no puede ser nula. En cambio, si $R < h$, tenemos que

$$Y' > 0 \text{ si } 0 \leq X < -h^2/2(R-h)$$

$$Y' = 0 \text{ si } X = -h^2/2(R-h)$$

$$Y' < 0 \text{ si } -h^2/2(R-h) < X \leq h$$

Luego para que Y sea primero creciente y después decreciente en $0 \leq X \leq h$, es necesario que $R < h$.

c) Si $h = 3R$, tenemos que

(3) $$Y = 2\pi(9RX - 2X^2)/9$$

y su gráfico se dibuja en la figura 3 :

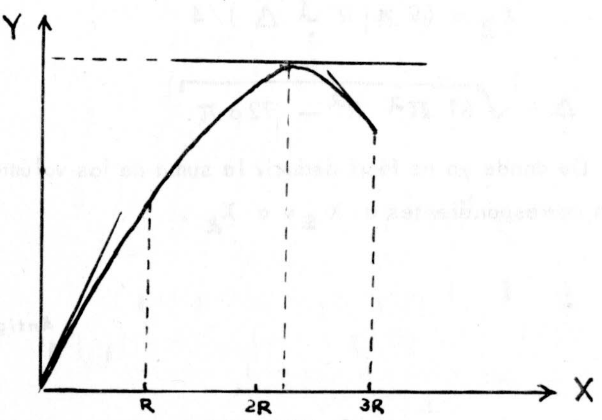

FIGURA 3

d) Si queremos que $Y = 2a$ debemos tener :

$$2\pi(9RX - 2X^2)/9 = 2a$$

ó

(4) $$2\pi X^2 - 9\pi RX + 9a = 0$$

La ecuación (4) tiene dos raíces reales X_1, X_2 distintas si si

$$81\,\pi^2 R^2 - 72 a\,\pi > 0$$

ó lo que es lo mismo si si

$$9\,\pi\, R^2 > 8a$$

es decir, a debe satisfacer las desigualdades

$$9\,\pi\, R^2/8 > a \geq 0$$

Si éste es el caso, las soluciones están dadas por

$$X_1 = (9\,\pi\, R + \Delta)/4$$

$$X_2 = (9\,\pi\, R - \Delta)/4$$

donde $\Delta = \sqrt{81\,\pi^2\, R^2 - 72 a\,\pi}$

De donde ya es fácil deducir la suma de los volúmenes de los cilindros correspondientes a X_1 y a X_2.

Antiguo Alumno.