7 - LA FUNCION GENERATRIZ DE LOS NUMEROS DE FIBONACCI

Como bien se sabe, se llaman números de FIBONACCI a los números

(1) 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

tales que, a partir del 1 y 2, todos los demás se obtienen como la suma de sus dos antecesores. Llamaremos función de FIBONACCI a la aplicación inyectiva $n \rightarrow F(n)$ que a cada número natural n le hace corresponder el n-ésimo término de la sucesión (1). Nuestro problema es el de establecer una ecuación $y = F(n)$ que nos dé el valor del n-ésimo número de FIBONACCI explícitamente en términos del número natural n. La solución es sencilla: si llamamos $y_n = F(n)$, sabemos que

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \tag{2}$$

o sea

$$y_n - y_{n-1} - y_{n-2} = 0 \tag{3}$$

ecuación esta que es una ecuación de diferencias finitas, lineal, de segundo orden, con coeficientes constantes, homogénea.

Es bien sabido que tales ecuaciones (en diferencias finitas) tienen soluciones que son funciones potenciales de la forma

$$F(n) = C\beta^n \tag{4}$$

en donde C es una constante y β es un número que ha de determinarse de modo que (1) se satisfaga idénticamente.

Sustituyendo la expresión (4) en (2) se halla inmediatamente

$$C\beta^n(1 - \beta^{-1} - \beta^{-2}) = 0 \tag{5}$$

y para que esta expresión sea idénticamente nula es necesario y suficiente que el paréntesis sea cero. Puesto que, de antemano prescindimos de considerar soluciones triviales, es $\beta \neq 0$ y la anulación del polinomio lleva a la ecuación algebráica

$$(6) \qquad \beta^2 - \beta - 1 = 0$$

llamada la ecuación auxiliar de (2), y cuyas raíces son

$$\beta_1 = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = 1{,}618034, \qquad \beta_2 = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5}) = -0{,}881966$$

de modo que la ecuación (2) tiene las dos soluciones

$$C_1(1{,}618034)^n \quad \text{y} \quad C_2(-0{,}881966)^n$$

de tal manera que usando el teorema de superposición, la solución general de (2) es

$$y_n = (1{,}618034)^n C_1 + (-0{,}881966)^n C_2$$

Para calcular las constantes aplicaremos el resultado a los términos iniciales $1 = y_0$ y $2 = y_1$:

$$1 = C_1 + C_2$$

$$2 = (1{,}618034)C_1 - (0{,}881966)C_2$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}618034 & -0{,}881966 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2{,}5} \begin{pmatrix} 0{,}881966 & 1 \\ 1{,}618034 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 0{,}4 \begin{pmatrix} 0{,}881966 + 2 \\ 1{,}618034 - 2 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = 1,1527864, \quad y \quad C_2 = 0,1527864$$

Para comprobar la corrección de la solución hallada

$$y_n = (1,1527864)(1,618)^n - (0,1527864)(-0,882)^n$$

calculamos y_2 utilizando esta expresión :

$$y_2 = (1,1527864)(1,618034)^2 - (0,1527864)(0,881966)^2$$

$$= 3,00$$

La exactitud de los resultados mejora a medida que n es mayor, y aún, para valores de n que sobrepasen a números del orden de 10, puede escribirse, con error despreciable

$$y_n = (1,1527864)(1,618034)^n.$$

(Tomado de DYNA, Nº. 74)

GABRIEL POVEDA RAMOS
Universidad del Valle.