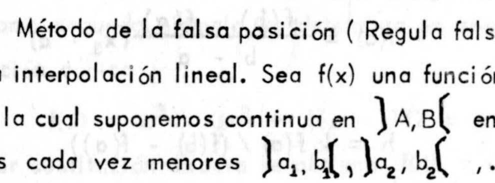
8 - RESOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES

Método de la falsa posición (Regula falsis) . - Este método utiliza la interpolación lineal. Sea f(x) una función algebraica o trascendente la cual suponemos continua en $]A, B[$ en la cual encajamos intervalos cada vez menores $]a_1, b_1[$, $]a_2, b_2[$, ... , en general, $]a, b[$.

Si, calculada la función para a y para b se obtienen valores de signo contrario, entonces la función f(x) tendrá un número impar de ceros en el intervalo $]a, b[$; en lenguaje tradicional, la ecuación $f(x) = 0$ tendrá un número impar de raíces, representadas geométricamente por los interceptos que la gráfica o curva representativa de la función, determina sobre el eje de las x.



(En la figura adjunta hemos indicado una raíz única, abscisa del punto

1); f(a) tiene signo positivo y f(b) signo negativo)

Estrechando suficientemente el intervalo $]a, b[$, y además, por análisis de la marcha de la primera derivada f'(x) y el signo que la derivada segunda f''(x) posee en el intervalo, es fácil reducirse siempre al caso en que se tiene una sola raíz en el intervalo $]a, b[$.

El método de aproximaciones sucesivas, conocido con el nombre de Regula falsis, consiste en sustituir la curva f(x) entre los puntos de abscisas a, b, por el segmento de recta que une los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)). Así la función f(x) queda reemplazada en el intervalo por una función lineal. El intercepto (cero) de la curva indicado por L, queda sustituído por el intercepto de esta cuerda, T.

La ecuación de la recta que une los dos puntos es, según la Geometría Analítica,

$$(1) \qquad y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

De donde, llamado x_1 la abscisa de la traza T, se tiene,

$$(2) \qquad - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x_1 - a)$$

ó

$$(3) \qquad h = k\, f(a) \,/\, (f(b) - f(a))$$

donde $h = x_1 - a$, y $k = b - a$.

Los ejemplos que se dan a continuación, trabajados con máquina calculadora de tipo comercial, serán suficientes para la correcta asimilación del método que nos ocupa.

I. - EXTRACCION DE RAICES ARITMETICAS

Se desea calcular la raíz cúbica de 10 con siete cifras decimales exactas. Se escribe con tal fín

$$f(x) = x^3 - 10;$$

debemos, pues hallar el cero de esta función (la raíz real de la ecuación $x^3 - 10 = 0$).

Para $a = 2$ y $b = 2,2$, se obtiene : $f(2) = -2$ y $f(2,2) = 0,648$, y aplicando (3),

$$h = 0,15; \ a_1 = a + h = 2,15; \ b_1 = 2,16$$

Para el nuevo intervalo se tiene,

$$f(2,15) = -0,006162$$

$$f(2,16) = 0,007770, \text{ de donde}$$

(fórmula 3)

$$h_1 = 0,004422.$$

Los nuevos valores de ensayo son,

$$a_2 = 2,154 \quad y \quad b_2 = 2,155$$

para los cuales se tiene,

$$f(a_2) = -0,006052 \ ; \ f(b_2) = 0,007874$$

$$h_2 = 0,0004347 \ ; \ x_3 = 2,1544247.$$

II. - *RAICES DE ECUACIONES POLINOMIALES.*

Como segundo ejemplo se determina en seguida una raíz real de la ecuación cúbica

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 16x - 117 = 0$$

Por sustitución directa se obtiene $f(4) = -37$ y $f(5) = 13$. Se advierte la presencia de una raíz en el intervalo $[4,5]$. Una sola, porque la derivada $f'(x) = 3x^2 - 6x + 16$ mantiene signo constante (positivo) en dicho intervalo

Teniendo en cuenta que $a = 4$ y $b = 5$, se tiene como primera corrección a la raíz $x_0 = 4$:

$$h = 0,74$$

Ahora utilizando la división sintética calcularemos los valores correspondientes a $a_1 = 4,7$ y $b_1 = 4,8$. Se obtiene

$$f(4,7) = -4,247 \quad y \quad f(4,8) = 1,272$$

con lo cual la nueva corrección es, $h_1 = 0,077$; de donde se obtiene como nueva valoración de la raíz,

$$x_1 = 4,777.$$

Eligiendo ahora como nuevo intervalo el comprendido entre $a_2 = 4,77$ y $b_2 = 4,78$, podrá obtenerse la nueva corrección y con esto un valor más valedero de la raíz :

$$f(a_2) = -0,4074 \; ; \; f(b_2) = 0,1502$$

$$h_2 = 0,0073 \; ; \; x_2 = 4,7773$$

III. - *FUNCIONES TRASCENDENTES.*

Nos ocupamos enseguida de la resolución de una ecuación trascendente. Se trata de determinar el primer cero positivo de la función

$$f(x) = \cosh(x) - 2\operatorname{sen}(x)$$

Con la ayuda de las tablas obtenemos,

x	f(x)
0,6	0,5618
0,7	0,3327

$$h = \frac{(0,1)\ (\ 0,5618)}{0,8945} = 0,062$$

Tomando ahora $a_1 = 0,64$, $b_1 = 0,68$ se obtiene de la tabla,

$$f(0,64) = 0,01750 \; ; \; f(0,68) = -0,01733$$

de donde, $h_1 = 0,0201$ y $x_1 = 0,6601$. Para este valor resulta,

$$f(x_1) = -0,00041.$$

Así podrá continuarse en la determinación de nuevas cifras decimales para la raíz. Para el cálculo de esta función trascendente fueron utilizadas las siguientes tablas : "Table of circular and hyperbolic sines and cosines for radian arguments", MT3, National Bureau of Standars.

IV. - *NOTICIA HISTORICA*

Aunque desconocemos el origen histórico de este método y la extensión con que los matemáticos de los siglos XVII y XVIII hicieron empleo del mismo, conviene destacar como redescubridor y expositor apasionado del mismo, a JOSE MARIANO VALLEJO, matemático y pedagogo español del siglo pasado (1799 - 1846). Entre sus obras citaremos el "Compendio de Matemática" (Vda. Ch. Bouret, París, 1847); la influencia de esta obra en los medios colegiales colombianos del siglo pasado fue considerable. Cabe anotar que el uso de gráficas cartesianas y el empleo de máquinas de calcular, lo hacen intuitivo y eficáz, respectivamente. La resolución numérica de ecuaciones se convierte así, como el mismo VALLEJO lo anotara, en una cuestión sencillísima la cual se reduce a obtener cuartas proporcionales.

(Tomado de DYNA, No. 75).

LUIS DE GREIFF BRAVO
Universidad de Medellín