PROBLEMAS PROPUESTOS

Los problemas son señalados por cero, uno, o dos asteriscos según el grado de dificultad. Las soluciones deben ser enviadas a :

Revista de Matemáticas Elementales
Apartado Nacional No 25-21
BOGOTA, D. E., COLOMBIA

La solución a cada problema debe venir en hoja por separado. Los alumnos de bachillerato deben enviar, junto con las soluciones, el nombre del colegio y de su profesor de matemáticas. A las dos primeras personas que envíen la solución de un problema se les obsequiará un ejemplar del número en que aparezca la solución del problema; por tanto, rogamos enviar la dirección exacta.

Volvemos a publicar los siguientes problemas de los cuales no hemos recibido soluciones :

3. Si un número entero positivo N es divisible por cada entero $\leq\sqrt{N}$, entonces N es igual a 24, o un divisor de 24.

21. Demostrar que el producto de tres enteros positivos consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto, ni el doble de un cuadrado perfecto.

31. Se da un tablero rectangular de lados a y b, constituído por las rectas de ecuaciones

$$x = 0,\ x = 1,\ x = 2, \ldots, x = a,$$

$$y = 0,\ y = 1,\ y = 2, \ldots, y = b.$$

Del punto (0,0) parte un móvil que se traslada hasta el punto (a,b) marchando a lo largo de las líneas antes citadas, que limitan los recuadros sin poder trasladarse de un cruce a otro inmediato de ordenada o de abscisa menor que él. Se pide : ¿Cuántas trayectorias distintos podrá seguir el móvil?(a y b son número enteros positivos) (Escuela de Ingenieros de caminos, Canales y Puertos, Examen de Ingreso, Madrid, 1949).

32. Una bolsa contiene cinco bolas de las que pueden ser blancas las cinco, cuatro, tres, dos, una o ninguna. Se saca una bola que resul-

ta ser blanca. Cuál es la probabilidad de que esta sea la única bola blanca? (Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Examen de Ingreso, Madrid, 1949).

33. Un viajero va de un punto A, de la superficie terrestre a otro B, distantes entre si 2.237 millas, medidas sobre el arco de círculo máximo que pasa por los dos puntos. Este viajero lleva un cronómetro que adelanta 22 segundos en las 24 horas. Al empezar el viaje, hace la determinación del tiempo en A y observa en ese instante que el cronómetro está adelantado 4 minutos 18.7 segundos con relación al tiempo local medio de A.

Al llegar a B, comprueba que el cronómetro está atrasado 5 minutos 12,3 segundos con respecto al tiempo local medio en B.

Sabiendo que el tiempo transcurrido en el viaje entre las determinaciones en A y en B es, según dicho cronómetro, de 37,45 días, y que el punto A está situado en el Ecuador, se pide determinar la distancia de B al Polo, expresada en kilómetros.

Se supone que la tierra es esférica.

Una milla equivale a 1.853,15 metros.

(Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Examen de Ingreso, Madrid 1949).

38. Demostrar que el producto de dos números consecutivos no puede ser el cubo de un número entero diferente de cero.

42. Consideremos dos líneas rectas D y D' no situadas en el mismo plano.

(i) Siendo A y B dos puntos de D, A' y B' dos puntos de D', mostrar que los planos mediatrices de AA' y de BB' se cortan necesariamente.

Llamemos Δ la intersección de los planos mediatríces.

(ii) Supongamos ahora que A' B' = AB.

a) Demostrar que todo punto de Δ es equidistante a las rectas D y D'.

b) Deducir de ahí que, si llamamos H y K los puntos de intersección de Δ y D con la perpendicular común a estas dos rectas, y H' y K' los puntos de intersección de Δ y D' con la perpendicular común a estas dos rectas, y H y H' coinciden y se tiene que $HK = HK'$ y $A'K' = AK$.

c) Mostrar que las proyecciones ortogonales de los segmentos AK y A'K' sobre un plano perpendicular a Δ son iguales. (Dibújese la proyeccion de la figura sobre este plano).

Deducir de ahí que Δ forma ángulos iguales con D y con D'.

(Bachillerato, 1a. parte, Clemont-Ferrand, Francia, 1948).

111. A qué hora exacta (hora, minuto, segundo y fracción de segundo) coinciden por primera vez después de las doce el horario y el minutero del reloj? A qué hora exacta están en oposición por primera vez?.

115. Demostrar que un número de la forma $4^k(8m + 7)$ (donde k y m son enteros positivos) no es la suma de tres cuadrados.

NUEVOS PROBLEMAS

136. - Resolver los sistemas de ecuaciones, y dibujar las soluciones en el plano x0y.

a) $x^2 + y^2 = 13$, $xy = 6$

d) $x + xy + y = 14$, $x^2 + xy + y^2 = 84$

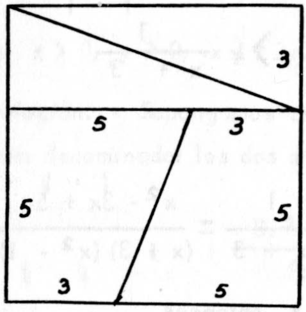
b) $x^3 - y^3 = 9$, $x - y = 3$

e) $1/x + 1/y = 11$, $1/x^2 + 1/y^2 = 61$

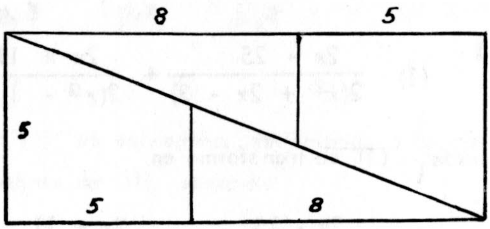
c) $x^3 + y^3 = 35$, $x^2 - xy + y^2 = 7$, $x + y = 5$

f) $x(x + y) = -6$, $y(x + y) = 10$

137. - Halle el error en la siguiente demostración : "Consideremos un cuadro de lado 8 y cortémoslo en cuatro pedazos como indica la figura 1, luego tomamos estos pedazos para formar un rectángulo



(Fig.1)



(Fig.2)

de lados 13 y 5 como en la figura 2. Concluímos que 64 = 65.

138. - Determinar todos los números enteros positivos que divididos por 17 dan un residuo igual al cuadrado del cuociente respectivo.

139. - Determinar los enteros a y n para los cuales $a^n + 1$ es divisible por 10.

140. - Muestre que si n es un múltiplo de 6, entonces

$$\sum_{m=0}^{n/2} \binom{n}{2m} (-3)^m = 2^n$$