EL PROBLEMA DE LAS 13 MONEDAS Y SU GENERALIZACION.

Por

F. LLERAS
(BAVARIA)

Existe en las matemáticas una aplicación que parece, a primera vista, no tener importancia práctica alguna, el Pasatiempo matemático .

Sin embargo, quien se aficiona a esta rama de las matemáticas, como pasatiempo, encuentra que a más de olvidar por algún tiempo el cúmulo de desagrados, grandes o pequeños, de que está llena la vida, le proporciona a la larga un buen número de nuevos ángulos de ataque a problemas intrincados, que se le presentan en la vida profesional.

Hay entre los pasatiempos uno que muestra, cómo un problema que a primera vista podría decirse que es de puro tanteo, se puede atacar en forma lógica con una herramienta adecuada, las matemáticas, y el cual puede enunciarse en la forma siguiente: Dadas 13 monedas iguales en apariencia, se sabe que puede haber a lo más una de ellas falsa, con peso distinto (en más o en menos sin especificar) a las otras; con una balanza de platillos y pesas determinar, en 3 pesadas solamente:

a).- Si hay o no moneda falsa

b).- Cuál es la falsa si la hay

c).- Cuál es el peso de la moneda buena

d).- Cuál es el peso de la moneda falsa si la hay.

Veamos cómo se resuelve el problema con un sistema sencillo y en qué forma al aplicar este mismo sistema podemos generalizar el problema determinando cuál es el máximo número de monedas en que es posible hacer las mismas determinaciones anteriores, cuando se puede usar la balanza n veces

SOLUCION PARA 13 MONEDAS Y n=3

Teniendo en cuenta que las monedas pueden estar en una de tres posiciones: platillo izquierdo (I), sin pesar (X) o platillo derecho (D) y además que no haya dos monedas que ocupen la misma posición relativa en las tres pesadas para poderlas diferenciar, se llega a la conclusión de que el esquema de pesadas se puede relacionar con un grupo de números distintos en un sistema de numeración de base 3.

Procediendo a numerar las monedas con un sistema de dicha base tendríamos el cuadro siguiente en que la primera cifra representa la posición de la moneda en la primera pesada, la segunda cifra la posición en la segunda y la última de la tercera pesada:

1-000	4-010	7-020	10-100	13-110
2-001	5-011	8-021	11-101	14-111
3-002	6-012	9-022	12-102	

Hemos puesto 14 monedas para hacer notar que la moneda #1 y la #14 ocupan siempre la misma posición relativa durante las tres pesadas y por esta razón el máximo número de monedas diferenciables con este sistema de pesadas es de 13.

Hagamos ahora 0 = I 1 = X 2 = D

1-III	4-IXI	7-IDI	10-XII	13-XXI
2-IIX	5-IXX	8-IDX	11-XIX	
3-IID	6-IXD	9-IDD	12-XID	

Las pesadas en la balanza serían por lo tanto:

1a. pesada $\begin{cases} \text{Izq. } 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \\ \text{Der. } P_1 \end{cases}$ Fuera 10,11,12,13

2a. pesada $\begin{cases} \text{Izq. } 1, 2, 3, 10, 11, 12 \\ \text{Der. } 7, 8, 9, P_2 \end{cases}$ Fuera 4,5,6,13

$$3a.\ \text{pesada}\begin{cases}\text{Izq.}\ 1, 4, 7, 10, 13 \\ \text{Der.}\ 3, 6, 9, 12, P_3\end{cases}\quad \text{Fuera } 2,5,8,11$$

Llamemos F = peso de la falsa

B = peso de la buena

Lógicamente si $P_3 = \frac{P_2}{3} = \frac{P_1}{9}$ todas las monedas tendrán el mismo peso y por lo tanto no habrá moneda falsa y $B = P_3$.

Observamos que hay 4 grupos de monedas cada uno con 3 monedas --- que ocupan la misma posición en la primera y segunda pesadas.

1, 2, 3 4, 5, 6 7, 8, 9 10, 11, 12

Supongamos que la moneda falsa está en cada uno de estos grupos y analicemos la relación entre P_1 , P_2 , F y B ; luego entramos a determinar la relación entre P_1, P_2, P_3, para la moneda falsa en cada posición dentro de su grupo .

Si la falsa está en el grupo 1, 2, 3

Tendremos las ecuaciones siguientes:

$F + 8B = P_1$

Restando de la la. la 2a. $6B = P_1 - P_2$ $B = \frac{P_1 - P_2}{6}$,

$F + 2B = P_2$ Reemplazando en la 2a. $F + \frac{P_1 - P_2}{3} = P_2$

$$F = \frac{4P_2 - P_1}{3}$$

Determinemos ahora la relación entre P_1 P_2 P_3, para cada posición de la moneda falsa, en la 3a. pesada.

Si la #1 es falsa:

$$P_3 = F = \frac{4P_2 - P_1}{3}$$

Si la #2 es falsa

$$P_3 = B = \frac{P_1 - P_2}{6}$$

Si la # 3 es falsa

$$2B = F + P_3$$

$$\frac{P_1 - P_2}{3} = \frac{4P_2 - P_1 + P_3}{3}$$

$$P_3 = \frac{2P_1 - 5P_2}{3}$$

<u>Si la falsa está en el grupo 4, 5, 6,</u>

Tenemos en la. y 2a.

$$F + 8B = P_1 \qquad \therefore \qquad B = \frac{P_2}{3} \qquad\qquad F = P_1 - \frac{8P_2}{3} = \frac{3P_1 - 8P_2}{3}$$

$$3B = P_2$$

y en la tercera pesada:

Si la # 4 es falsa

$$P_3 = F = \frac{3P_1 - 8P_2}{3}$$

Si la # 5 es falsa

$$P_3 = B = \frac{P_2}{3} \qquad\qquad P_3 \neq \frac{P_1}{9}$$

Si la # 6 es falsa

$$2B = F + P_3 \qquad \frac{2P_2}{3} = \frac{3P_1 - 8P_2 + P_3}{3} \qquad\qquad P_3 = \frac{10P_2 - 3P_1}{3}$$

Si la falsa está en el grupo 7, 8, 9

Tenemos en las dos primeras pesadas:

$$F + 8B = P_1 \qquad \therefore \quad 12B = P_1 + P_2 \qquad B = \frac{P_1 + P_2}{12}$$

$$4B = P_2 + F \qquad F = 4B - P_2 = \frac{P_1 + P_2}{3} - P_2 = \frac{P_1 - 2P_2}{3}$$

y en la tercera pesada:

Si la # 7 es falsa

$$P_3 = F = \frac{P_1 - 2P_2}{3}$$

Si la # 8 es falsa

$$P_3 = B = \frac{P_1 + P_2}{12}$$

Si la # 9 es falsa

$$P_3 + F = 2B \qquad P_3 = \frac{P_1 + P_2}{6} - \frac{P_1 - 2P_2}{3} = \frac{5P_2 - P_1}{6}$$

Si la falsa está en el grupo 10, 11, 12

$$9B = P_1 \qquad B = \frac{P_1}{9} \qquad F + \frac{2P_1}{9} = P_2 \qquad F = \frac{9P_2 - 2P_1}{9}$$

$$F + 2B = P_2$$

En la tercera pesada

si la falsa es la # 10

$$P_3 = F = \frac{9P_2 - 2P_1}{9}$$

Si la falsa es la # 11

$$P_3 = B = \frac{P_1}{9} \qquad P_3 \neq \frac{P_2}{3}$$

Si la falsa es la # 12

$$2B = F + P_3 \qquad P_3 = 2B - F = \frac{2P_1}{9} - \frac{9P_2 - 2P_1}{9} = \frac{4P_1 - 9P_2}{9}$$

Por último si la # 13 es falsa

$$P_3 = F \qquad \frac{P_1}{9} = \frac{P_2}{3} = B$$

$$P_3 \neq \frac{P_1}{9} \qquad \frac{P_1}{9} = \frac{P_2}{3}$$

Como se ve de la relación en que se hallan P_1, P_2, y P_3 se pueden - deducir cual es la falsa y cual es el peso de la moneda falsa y de la buena, ya que todas las relaciones son distintas para cada una de las posiciones de la moneda falsa.

GENERALIZACION.:

Veamos qué sucede para cuatro pesadas (n = 4).

Sigamos el mismo procedimiento pero con números de 4 cifras en el - sistema base 3.

1-0000	4-0010	7-0020	10-0100	13-0110
2-0001	5-0011	8-0021	11-0101	14-0111
3-0002	6-0012	9-0022	12-0102	15-0112
16-0120	19-0200	22-0210	25-0220	28-1000
17-0121	20-0201	23-0211	26-0221	29-1001
18-0122	21-0202	24-0212	27-0222	30-1002
31-1010	34-1020	37-1100	40-1110	
32-1011	35-1021	38-1101	41-1111	
33-1012	36-1022	39-1102		

Vemos ya que el máximo número de monedas será de 40

La tabla de posiciones quedaría pués:

1 III	4-IIXI	7-IIDI	10-IXII	13-IXXI
2 IIIX	5-IIXX	8-IIDX	11-IXIX	14-IXXX
3 IIID	6-IIXD	9-IIDD	12-IXID	15-IXXD
A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
16-IXDI	19-IDII	22-IDXI	25-IDDI	28-XIII
17-IXDX	20-IDIX	23-IDXX	26-IDDX	29-XIIX
18-IXDD	21-IDID	24-IDXD	27-IDDD	30-XIID
A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
31-XIXI	34-XIDI	37-XXII	40-XXXI	
32-XIXX	35-XIDX	38-XXIX		
33-XIXD	36-XIDD	39-XXID		
A_{11}	A_{12}	A_{13}		

Para mayor comodidad y comprensión llamemos los grupos 1, 2, 3 = A_1
4, 5, 6 = A_2 etc. como se ve en el cuadro.
Tendríamos las pesadas serían:

$$\text{1a. pesada}\begin{cases}\text{Izq. } A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6\ A_7\ A_8\ A_9\\ \text{Der. } P_1\end{cases}$$

$$\text{2a. pesada}\begin{cases}\text{Izq. } A_1\ \ A_2\ \ A_3\ \ A_{10}\ \ A_{11}\ A_{12}\\ \text{Der. } A_7\ \ A_8\ \ A_9\ \ \ P_2\end{cases}$$

3a. pesada $\begin{cases} \text{Izq.} & A_1 \; A_4 \; A_7 \; A_{10} \; A_{13} \\ \text{Der.} & A_3 \; A_6 \; A_9 \; A_{12} \; P_3 \end{cases}$

4a. pesada $\begin{cases} \text{Izq.} & 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40 \\ \text{Der.} & 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33\ 36, 39, P_3 \end{cases}$

Vemos claramente que las tres primeras pesadas consisten exactamente en resolver el problema de las 13 monedas, obteniendo que grupo A_i es el falso, cuál es su peso y cuál es el peso del grupo bueno. En la tercera pesada ya es fácil determinar la relación entre P_1, P_2 y P_3 para cada una de las posiciones de la moneda falsa.

Sin esfuerzo es claro ver que para $n = 5$ tendríamos que el número total de monedas sería de $40\ A_i + 1 = 40 \times 3 + 1 = 121$.

Ahora bien:
Para

$n = 3 \quad N_3 = 13 = 1 + 3 + 9 = 3^0 + 3^1 + 3^2$

$n = 4 \quad N_4 = 3N_3 + 1 = 1 + 3 + 9 + 27 = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3$

$n = 5 \quad N_5 = 3N_4 + 1 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4$

Tendriamos

Para $n = n \quad N_n = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots 3^{n-1} = \dfrac{3^n - 1}{3-1} = \dfrac{3^n - 1}{2}$

Que es el máximo número de monedas en que se pueden hacer las determinaciones pedidas haciendo uso de la balanza n veces.

(Recibido en Octubre de 1.964).