# CALCULAR CUAL ES EL MENOR NUMERO NATURAL EN CUYO FACTORIAL SE ENCUENTRA DETERMINADO FACTOR PRIMO ELEVADO A DETERMINADO EXPONENTE.

Por

ROBERTO NAVARRO GONZALEZ

(Fac. de Minas, U. N.)

Observemos, ante todo, que, eligiendo los datos al azar, el problema no es siempre resoluble. Basta considerar, por ejemplo, que los respectivos exponentes de 7 en $343 = 7^3$ y en 342 han de diferir entre sí en 3 unidades, de modo que no existirá ningún número en cuyo factorial se encuentre 7 elevado a un exponente intermedio.

La forma clásica de resolver este problema, citada en Análisis algebráico de Rey Pastor, atribuyéndola a Legendre, es la siguiente:

Supongamos que <u>n</u> es el número en cuyo factorial está el primo <u>p</u> elevado a <u>k</u>. Sabemos que este exponente es igual a la suma de los cocientes obtenidos dividiendo reiteradamente <u>n</u> por <u>p</u>. Representemos estas divisiones

$$\begin{array}{l|l} n & p \\ \hline r_1 & q_1 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} q_1 & p \\ \hline r_2 & q_2 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} q_2 & p \\ \hline r_3 & q_3 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} q_3 & p \\ \hline r_4 & 0 \end{array} \qquad (1)$$

admitiendo, a fin de fijar imágenes, que a la cuarta división se tenga cociente nulo. Entonces tendremos:

$$k = q_1 + q_2 + q_3 \qquad (2)$$

y por otra parte resulta

$$n = \underline{r_4 r_3 r_2 r_1}\,p \qquad (3)$$

Expresando mediante este símbolo que <u>n</u> tiene las cifras $r_4$, $r_3$, $r_2$ y $r_1$ en base <u>p</u>. Si llamamos <u>s</u> a la suma de las cifras de <u>n</u> en base <u>p</u>, tendremos:

$$s = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \tag{4}$$

De las divisiones dadas, resulta:

$$\begin{aligned} n &= pq_1 + r_1 \\ q_1 &= pq_2 + r_2 \\ q_2 &= pq_3 + r_3 \\ q_3 &= \phantom{pq_3 +{}} r_4 \end{aligned} \tag{5}$$

Sumando estas igualdades, queda:

$$n + q_1 + q_2 + q_3 = p(q_1 + q_2 + q_3) + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \tag{6}$$

Y teniendo en cuenta las expresiones de $\underline{k}$ y de $\underline{s}$ dadas en (2) y - en (4) respectivamente:

$$n + k = pk + s \quad ; \quad n = (p - 1)k + s \tag{7}$$

de lo cual se deduce la siguiente regla:

El **número** buscado es igual al producto del factor primo disminuido en una unidad por el exponente, más la **suma** de las cifras del propio número buscado cuando dicho número se escribe en base $\underline{p}$ . Por otra parte tiene que cumplirse que

$$n = \dot{p} \text{ (múltiplo de p)} \tag{8}$$

ya que cuando $\underline{n}$ varía desde un múltiplo de $\underline{p}$ hasta el número inmediatamente inferior al siguiente múltiplo, el exponente de $\underline{p}$ permanece invariable, y crece en una o más unidades justamente al alcanzar $\underline{n}$ el valor del múltiplo de $\underline{p}$ inmediato; por tanto, de todos los números en cuyos respectivos - factoriales tenga $\underline{p}$ el mismo exponente, el menor es siempre múltiplo de $\underline{p}$.

Teniendo esto en cuenta, como quiera que el producto $\underline{(p - 1)k}$ se puede calcular a partir de los datos del problema, se van dando a $\underline{s}$ valores en sucesión creciente, de modo que la suma $\underline{(p - 1)k + s}$ quede siempre múltiplo de p, empezando por el mínimo valor de $\underline{s}$. Cuando uno de los valores dados a $\underline{s}$ sea tal que el valor de $\underline{n}$ resultante, **puesto** en base $\underline{p}$, dé - unas cifras que sumen precisamente $\underline{s}$, habremos dado con la **solución**, si la hay.

Supongamos, por ejemplo, que tratamos de hallar el mínimo número natural en cuyo factorial se encuentre 5 elevado a 628. Tendremos:

$$p = 5 \quad ; \quad k = 628 \quad ; \quad (p-1)k = 4 \times 628 = 2512 \qquad (9)$$

El mínimo número que podemos añadir a 2512 para que quede múltiplo de 5 es 3. Ensayemos, pues, el 3 como presunto valor de $\underline{s}$:

$$2512 + 3 = 2515 = 40030_5 \qquad (10)$$

pero en este caso las cifras del presunto $\underline{n}$ en base 5 no suman 3, que es el valor dado a $\underline{s}$; sino 7. Luego debemos desechar este valor de $\underline{s}$.

El siguiente valor que se puede dar a $\underline{s}$ es 8. Entonces se tiene:

$$2512 + 8 = 2520 = 40040_5 \qquad (11)$$

y como ahora las cifras del presunto $\underline{n}$ en base 5 suman 8, que es igual al valor dado a $\underline{s}$, éste es el resultado correcto, de modo que tendremos:

$$n = 2520 \qquad (12)$$

Este es el mencionado método de Legendre, que presenta no obstante, dos inconvenientes:

a) El tanteo, que siempre es anticientífico en matemáticas, y que debe ser evitado si es posible.

b) Los casos de imposibilidad, que no se ponen de manifiesto de un modo claro por medio de este método.

En relación con estos inconvenientes y con el fin de evitarlos el autor de estas líneas ha desarrollado otro método, cuyo proceso deductivo explicaremos con todo detalle.

Supongamos que se trata de averiguar cuál es el mínimo número en cuyo factorial se halle 7 elevado a 1349.

Observemos en primer lugar que si en el algoritmo de cálculo del exponente de 7 se produce en una sola división, el valor mínimo del exponente es 1 (que resulta cuando el número está comprendido entre 7 y 13, ambos inclusive).

Si se producen dos divisiones, el valor mínimo del exponente es $\underline{1 + 7}$, ya que , al ser 1 el valor mínimo del último cociente, 7 será a su vez el valor mínimo del primero.

Análogamente, si se producen tres divisiones, entonces el valor -

mínimo del exponente es $\underline{1 + 7 + 7^2}$, pues, dando siempre los valores los valores mínimos, 1 será el valor del último cociente, 7 el del penúltimo y $7^2$ el del primero.

Y así sucesivamente, para cuatro divisiones el valor mínimo del exponente será $\underline{1 + 7 + 7^2 + 7^3}$, etc.

Esto nos permite ya saber cuantas divisiones son necesarias para el exponente dado. En nuestro caso tendremos: (después de los correspondientes tanteos)

$$1 + 7 + 7^2 + 7^3 < 1349 < 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 \qquad (13)$$

con lo que podemos asegurar que el número de divisiones es 4.

Averiguemos ahora cuál es el último cociente. Para 4 divisiones, cuando el último cociente es 1, el mínimo valor del exponente es $\underline{1 + 7 + 7^2 + 7^3}$. Si el último cociente es 2, el mínimo valor del exponente será $\underline{2(1 + 7 + 7^2 + 7^3)}$, puesto que haciendo igual a 2 el último cociente, el mínimo valor del penúltimo será 2 X 7, el mínimo valor del anterior será 2 X $7^2$ y el mínimo valor del primero será 2 X $7^3$.

Parecidamente, si el último cociente es 3, el mínimo valor del exponente será $\underline{3(1 + 7 + 7^2 + 7^3)}$, y así sucesivamente, hasta dar al último cociente el valor 6, que es máximo posible, pues de valer 7 habría una división más, y ya no sería el último.

En el caso que estamos investigando, tendremos:

$$3(1 + 7 + 7^2 + 7^3) < 1349 < 4(1 + 7 + 7^2 + 7^3) \qquad (14)$$

con lo que ya podemos asegurar que hay cuatro divisiones y que 3 es el valor del último cociente.

Si ahora damos al último cociente el valor 3, y a los demás cocientes el valor mínimo que pueden tomar, teniendo en cuenta el del último, los cocientes, leídos del último al primero, formarán la sucesión

$$3 \; ; \; 21 \; ; \; 147 \; ; \; 1029 \qquad (15)$$

La suma de estos cocientes da 1200. Para llegar a 1349 faltan, pues, 149 unidades. Naturalmente, no podemos cambiar el valor del último cociente, pues ya ha sido determinado. Pero podemos alterar el valor del penúltimo, teniendo en cuenta, que, mientras le añadamos una cantidad inferior a 7, no habrá que modificar el último cociente.

Pero en cambio, al añadir unidades al penúltimo cociente, este incremento afectará a los cocientes segundo y primero. Si al penúltimo cocientele añadimos una unidad, deberemos añadir al menos 7 al segundo y al menos $7^2$ al primero; si al penúltimo le añadimos 2 unidades, deberemos añadir al menos 2 X 7 al segundo y 2 X $7^2$ al primero, y así hasta añadir 6 unidades al penúltimo cociente.

Como el número de **unidades** que faltan es 149, y se tiene

$$2(1 + 7 + 7^2) < 149 < 3(1 + 7 + 7^2) \tag{16}$$

y se ve con ello que hay que añadir 2 unidades al penúltimo cociente, 2X7= = 14 unidades al segundo 2 X $7^3$ = 98 unidades al primero.

Con esto, nos quedan ahora los cocientes

$$3 \; ; \; 23 ; \; 161 \; ; \; 1127 \tag{17}$$

cuya suma vale 1314, es decir $3(1 + 7 + 7^2 + 7^3) + 2(1 + 7 + 7^2)$.

Del valor de esta última suma, 1314, al del exponente, 1349, van 35 unidades. Ahora ya no podemos alterar el valor de los cocientes último y penúltimo, pero podemos, igual que antes, añadir unidades al segundo cociente, con lo que automáticamente se incrementará tambien el primero: por cada unidad añadida al segundo se añaden 7 al primero. Precediendo como antes, resulta:

$$4(1 + 7) < 35 < 5(1 + 7) \tag{18}$$

con lo que resulta que hay que añadir 4 unidades al segundo cociente. Nos quedan ahora los cocientes

$$3 \; ; \; 23 \; ; \; 165 \; ; \; 1155 \tag{19}$$

cuya suma vale 1346, o sea $3(1 + 7 + 7^2 + 7^3) + 2(1 + 7 + 7^2) + 4(1 + 7)$

Ahora sólo nos faltan 3 unidades para conseguir el exponente. Estas 3 unidades podemos añadirlas al primer cociente, sin tener que alterar los demás. La sucesión definitiva de cocientes **queda, pues, como sigue:**

$$3 \; ; \; 23 \; ; \; 165 \; ; \; 1158 \tag{20}$$

cuya suma es ya 1349, que además es igual a

$$3(1 + 7 + 7^2 + 7^3) + 2(1 + 7 + 7^2) + 4(1 + 7) + 3X1 \tag{21}$$

Como quiera que el número dado actúa como primer dividendo en el algoritmo (1), con un cociente igual al que hemos llamado primer cociente o sea 1158, y un divisor igual a 7, y además el número buscado ha de ser múltiplo de 7, como ya dijimos, tendremos:

$$n = 1158 \times 7 = 8106 \qquad (22)$$

**Todo lo hecho hasta el momento no** es el procedimiento, sino su fundamento remoto. Vamos a ver ahora cómo convertimos todo este cálculo en algo más practicable.

Hemos visto que el exponente dado se puede expresar así:

$$k = 1349 = 3(1 + 7 + 7^2 + 7^3) + 2(1 + 7 + 7^2) + 4(1+7) + 3 \times 1 \qquad (23)$$

Pero esto es lo mismo que afirmar que

$$k = 1349_{10} = 3333_7 + 222_7 + 44_7 + 3 \qquad (24)$$

Por otra parte, el primer cociente valía, en su primera etapa, 1029, o **sea** $3 \times 7^3$. Luego se le añadieron $2 \times 7^2 = 98$ unidades, con lo que en su segunda etapa valía 1127, o sea $3 \times 7^3 + 2 \times 7$. Luego se le **añadieron** $4 \times 7 = 28$ unidades, con lo que **en su tercera etapa tomó el valor** 1135 $= 3 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 4 \times 7$. Y, finalmente, en la última y definitiva etapa se le adicionaron 3 unidades más, por lo que el valor del primer cociente resulta ser:

$$q_1 = 1158_{10} = 3 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 4 \times 7 + 3 = 3243_7 \qquad (25)$$

y como el número buscado vale 7 veces el primer cociente , tal como se dijo, dicho número valdrá:

$$n = 7q_1 = 32430_7 \qquad (26)$$

Ahora empieza ya a **vislumbrarse** la ventaja de este procedimiento mientras el exponente dado, 1349, queda descompuesto tal como se indica en (24), el número buscado está formado, en base 7, por las mismas cifras sucesivamente repetidas, más un cero final, tal como se ve en (26).

Para descomponer el exponente en la suma dada, bastará pasarlo a base 7, y luego, operando siempre en dicha base ir restandole cada vez el mayor número posible que tenga todas sus cifras iguales, siguiendo hasta obtener una diferencia final nula. Esto es lo que vamos a verificar a continuación, indicando, por medio del 7 entre paréntesis que encabeza las operaciones, que éstas transcurren en dicha base:

$$1349_{10} = 3635_7 \qquad (27)$$

$$\begin{array}{rr} & (7) \\ & 3635 \\ - & 3333 \\ \hline & 302 \\ - & 222 \\ \hline & 50 \\ - & 44 \\ \hline & 3 \\ - & 3 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad (28)$$

Al fin y al cabo, estas restas equivalen a los tanteos efectuados al empezar a exponer este procedimiento, pero así como en base 7 es facilísimo ver 3635 está comprendido entre $3333_2$ y 4444, en base 10 era bastante trabajoso deducir que 1349 estaba comprendido entre $3(1 + 7 + 7^2 + 7^3)$ y $4(1 + 7 + 7^2 + 7^3)$. Las $302_7$ unidades que nos quedan después de la primera resta son los $149_{10}$ unidades que nos quedaban después de la primera presentación de cocientes. Y así análogamente en todo el proceso.

El procedimiento, pues, queda como sigue:

Se empieza por pasar el exponente a la base de numeración del primo dado. Operando siempre en dicha base, se resta del exponente el mayor número de cifras iguales posibles. Con la diferencia obtenida se sigue haciendo lo mismo, y así hasta llegar a una diferencia final nula.

El número buscado, escrito en la base de numeración del primo, está formado por las mismas cifras que se van repitiendo, escritas en el mismo orden en que han aparecido, seguidas al final de un cero.

Por esto, la resolución de este último caso ($p = 7$ ; $k = 1349$) se reduce sólo a lo siguiente:

a) Pasar a base 7 el exponente:

$$1349_{10} = 3635_7 \qquad (29)$$

b) Ir restando de $3635_7$, operando en base 7, un número tal, que todas sus cifras sean iguales, cada vez el mayor número posible, tal como se ve en (28).

c) Como las cifras repetidas son, por orden de aparición, 3, 2, 4, 3 el número buscado vale

$$n = 32430_7 \qquad (30)$$

d) Si se quiere, aunque en sí no es esencial, pasar este valor a base 10:

$$32430_7 = 8106_{10} \tag{31}$$

Cuando no se llega a **restar**, por innecesario, **un** número de un determinado número de cifras, se considera como si se hubiese restado un número compuesto de ceros, y por tanto aparece un cero en el número final. Por ejemplo, con los datos que sirvieron para exponer el método de Legendre (p= = 5 ; k = 628), tendríamos:

$$628_{10} = 10003_5 \tag{32}$$

y al verificar las restas, sucede lo siguiente:

$$\begin{array}{r} (5) \\ 10003 \\ -\underline{4444} \\ 4 \\ -\underline{4} \\ 0 \end{array} \tag{33}$$

No hemos tenido que restar ningún número de 3 cifras iguales ni de dos cifras iguales. En los lugares correspondientes, por tanto, aparecerán ceros, y tendremos:

$$n = 40040_5 = 2520_{10} \tag{34}$$

Cuando, por el contrario, se pueden restas dos veces consecutivas números compuestos por igual número de cifras iguales, estamos ante un caso de **imposibilidad**, pues esto indica que el exponente, puesto en la base del primo, no puede ser descompuesto en sumandos, todos de cifras iguales, pero todos de diferente número de cifras, tal como lo exige el procedimiento.

Por ejemplo, sea p = 7 ; k = 113 = $221_7$. Tendríamos:

$$\begin{array}{r} (7) \\ 221 \\ -\underline{111} \\ 110 \\ -\underline{66} \\ 11 \\ -\underline{11} \\ 0 \end{array} \tag{35}$$

y como se ha restado dos veces un número de dos cifras iguales el problema es incompatible.

Es interesante hacer notar que una condición suficiente pero no necesaria de compatibilidad es que las cifras del exponente, escrito en la base de numeración del primo, formen, leídas de izquierda a derecha, una sucesión monótona creciente. En este caso, además, existe un procedimiento más rápido que las restas para calcular las cifras de $n$ en base $p$, procedimiento que ilustraremos con un ejemplo.

Sea el caso $p = 7$ ; $k = 860_{10} = 2336_7$, en que las cifras de $k$ en base $p$ forman una sucesión monótona creciente. Entonces formemos un número con las cifras de $k$, pero precediendo un cero y repitiendo la cifra final:

$$023366 \tag{36}$$

Las cifras de $n$ serán las diferencias entre las cifras del número así formado, y leídas en el mismo orden. Como dichas diferencias son, por orden, 2, 1, 0, 3, 0, se tendrá directamente:

$$n = 21030_7 = 5166_{10} \tag{37}$$

quedando resuelto el problema. La justificación de este cálculo simplificado, comparándolo con el algoritmo de las restas, es fácil conseguir, y la omitimos por brevedad.

Puede verse, pues, cómo con este procedimiento se han obviado los inconvenientes del método de Legendre: no hay tanteo alguno y los casos de imposibilidad se advierten directamente al aplicar el algoritmo.

(Recibido Octubre de 1.964).