N O T A S   M A T E M A T I C A S

COMENTARIO SOBRE LA REGLA DE HÔPITAL

En algunos libros del cálculo se presenta la siguiente forma de la regla de Hôpital.

Regla de Hôpital

Sean f (x) y g (x) dos funciones que tienen n$^{\underline{a}}$ derivadas en (a,b). Se supone que

i) $f(c) = f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$

$g(c) = g'(c) = g''(c) = \ldots = g^{(n-1)}(c) = 0 \quad c\in(a,b)$

ii) $g^{(n)}(x) \neq 0$ si $x \in (a,b)$

entonces se obtiene

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(C)}{g^{(n)}(C)} \tag{1}$$

Se puede reemplazar la condición ii) por otra condición más débil:

iii) $g^{(n)}(c) \neq 0$ (2)

Demostración .

(a) Suponemos que no existe una vecindad de c en donde $g^{(n-1)}(x) \neq 0$, entonces c es un punto de acumulación de los ceros de la ecuación $g^{(n-1)}(x) = 0$, es decir, existe $\left\{x_k \mid g^{(n-1)}(x_k) = 0\right\}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_k = c$. De acuerdo con la n-sima derivabilidad de g(x), se obtiene

$$g^{(n)}(c) = \lim_{x\to c} \frac{g^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(c)}{x-c} = \lim_{x_k\to c} \frac{g^{(n-1)}(x_k)}{x_k - c} = 0$$

Esta contradice a (2). Por lo tanto existe una vecindad de c, $N(\delta,c)$, tal que

$$g^{(n-1)}(x) \neq 0 \qquad x\in N(\delta,c) \tag{3}$$

(b) De acuerdo con el teorema de Taylor, existe x_o, $x_o \in (c,x)$ o $x_o \in (x,c)$, tal que

$$\left\{f(x) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k\right\} g^{(n-1)}(x_0) = f^{(n-1)}(x_0)\left\{g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k\right\} \quad (4)$$

De la condición i), (4) tiene la siguiente forma:

$$f(x)\, g^{(n-1)}(x_0) = f^{(n-1)}(x_0)\, g(x) \quad (5)$$

Si x pertenece a $N(\delta,c)$ entonces x_o tambien pertenece a la misma vecindad, luego $g^{(n-1)}(x_o) \neq 0$. Por lo tanto se tiene

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{g^{(n-1)}(x_0)} = \frac{\left\{\dfrac{f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n-1)}(c)}{x_0 - c}\right\}}{\dfrac{g^{(n-1)}(x_0) - g^{(n-1)}(c)}{x_0 - c}}$$

Entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_0 \to c} \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{g^{(n-1)}(x_0)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}$$

YU TAKEUCHI (U.N.)