Nota: Sobre la Compacidad de los Intervalo Cerrados de Números Reales.

**La intención** de esta nota es proponer una demostración de la - Compacidad de los Intervalos Cerrados $[\alpha, \beta]$ de Números Reales (**R**), para la topología usual de tales números (Topología de los intervalos $(\alpha, \beta)$-abiertos). Tal resultado es bien conocidio de todos los matemáticos y generalmente enunciado con el nombre de teorema de Borel-Lebesgue. El lector conocerá entonces indudablemente muchas demostraciones de tal teorema y la que sigue será apenas una más. Mi propósito es solamente el siguiente:

lo.) Mostrar que tal propiedad no depende en esencia, sino de la estructura de orden de los números reales (todo intervalo cuando $[\alpha, \beta]$ es para el orden inducido sobre él, por el orden de **R**, un re-- tículo completo), y no de su estructura de grupo topolológico (y por tanto de espacio uniforme), sobre la cual está basada la demostración de Bourbaki [1].

**2o.** Desarrollar la demostración basandonos directamente en el axioma (c) de Bourbaki [2], o lo que es lo mismo, en el axioma (c )[3]. Es decir: Un espacio Topológico se dice Compacto si y solo si, es separado y verifica el axioma siguiente:

(c ) Todo ultrafiltro de X tiene un punto límite.

Enunciamos entonces:

<u>Proposición</u>: Sean $\alpha, \beta$ dos números reales, el intervalo cerrado $I = [\alpha, \beta]$ de **R** es un espacio topológico compacto. (Para la topología de subespacio de **R**).

Demostración: La proposición es trivial, si $\alpha = \beta$. Supongamos por tanto $\alpha < \beta$. Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre X. Sea A el conjunto de los extremos superiores de los elementos de $\mathcal{F}$.

$$A = \{\sup F \mid F \in \mathcal{F}\}$$

y sea $a = \text{Inf. } A$. Es de notar que Sup F e Inf A existen siempre, - pues $F \subseteq [\alpha, \beta]$, $A \subseteq [\alpha, \beta]$ y $[\alpha, \beta]$ es un retículo completo. Demostremos que $a = \lim \mathcal{F}$.

Supongamos que a no es límite del ultrafiltro $\mathcal{F}$. Existe entonces una vecindad $U = (\lambda, \mu)$ de a, tal que $U \notin \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro $C_I U \in \mathcal{F}$, Ahora bien:

$$C_I U = [\alpha, \lambda] \cup [\mu, \beta]$$

De nuevo, la condición de ser $\mathcal{F}$ un ultrafiltro implica que

$$[\alpha, \lambda] \in \mathcal{F} \text{ ó } [\mu, \beta] \in \mathcal{F}.$$

Veamos que esto es imposible, lo cual completará la demostración :

1o.) $[\alpha, \lambda] \notin \mathcal{F}$.

Esto es claro, puesto que la condición $[\alpha, \lambda] \in \mathcal{F}$ implica $\lambda$ = sup $[\alpha, \lambda] \geqslant a$ = Inf A, mientras que $\lambda < a$.

2o.) $[\mu, \beta] \notin \mathcal{F}$.

En efecto: Si $[\mu, \beta] \in \mathcal{F}$, entonces $[\mu, \beta] \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Por tanto sup $F \geq \mu$ para todo F y de esto:

Inf $\{\text{Sup } F \mid F \in \mathcal{F}\}$ = Inf A = a $\geq \mu$, mientras que $\mu > a$, lo cual completa la demostración de la proposición.

Como **R** es separado, $[\alpha, \beta]$ es separado y por tanto compacto.

Notamos finalmente que si un conjunto es cerrado y acotado en **R**, el está contenido en un intervalo $[\alpha, \beta]$ y un cerrado en un conjunto es compacto. **Como un compacto en un espacio Separado es Cerrado y como un conjunto no acotado en R, no puede ser compacto, queda demostrado el teorema de Borel-Lebesgue.**

JAIRO CHARRIS C.(U. N.)

(1) N. Bourbaki - Libro III - Topologie Générale - Cap. IV - 2- th2
(2) N. Bourbaki - Libro III - Topologie Générale - Cap. I - 9- Def1
(3) N. Bourbaki - Libro III - Topologie Générale - Cap. I - 9- Def1