Al dictar los cursos de matemáticas, encontramos, con frecuencia, las dudas que los textos no nos aclaran. A veces hay demostraciones muy complicadas, no adecuadas para el nivel del texto, o a veces se imponen muchas condiciones aparentemente no necesarias. Los profesores pueden modificar o cambiar las hipótesis de los teoremas con el propósito de no complicar las cabezas no-maduras de los estudiantes, si creen que el nivel de ellos es mas bajo que el de los textos.

Por esta razón, el conocimiento de los profesores debe ser un poco más profundo que el de los textos habituales. En nuestra revista se destinan unas páginas a los profesores que dictan los cursos de matemáticas generales. Los profesores, Ignacio Soriano (U.N.), Yu Takeuchi (U.N.) y Januario Varela (U.N.), se encargarán de redactar estas páginas.

DISCONTINUIDAD DE LA DERIVADA

Si la derivada de una función toma la discontinuidad en $x = c$ como en la figura 1., entonces la función original no es derivable en $x = c$ (Fig. 2), es decir, la derivada de una función derivable no puede tomar la discontinuidad del **salto.**

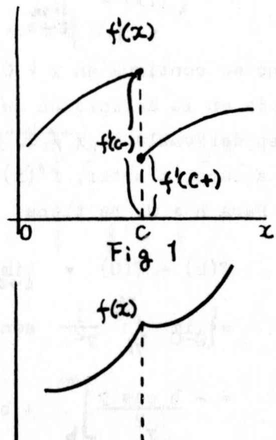

Fig 1

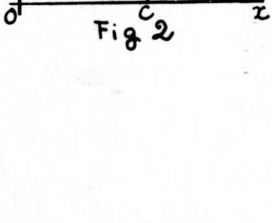

Fig 2

Teorema

Si $f'(c+) \neq f'(c-)$ entonces $f(x)$ no es derivable en $x = c$.

Demostración

Aplicando el teorema del valor medio se obtiene, para $h > 0$;

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(x_1) \qquad c < x_1 < c+h$$

$$\frac{f(c)-f(c-h)}{h} = f'(x_2) \qquad c-h < x_2 < c$$

entonces

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \to f'(c+) \qquad (h \to 0)$$

$$\frac{f(c-h)-f(c)}{-h} \to f'(c-) \qquad (-h \to 0)$$

la cual implica que $f(x)$ no es derivable en $x = c$.

De acuerdo con el teorema, la singularidad de $f'(x)$ de una función **$f(x)$ debe ser de otro tipo para que la función sea derivable.**

Ejemplo 1

Sean $\begin{cases} g(x) = 0 & (-1 \le x \le 0) \\ g(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} & (0 < x \le 1) \end{cases}$

$$\begin{cases} f(x) = 0 & (-1 \le x \le 0) \\ f(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^x g(t)\,dt = \int_0^x \operatorname{sen}\frac{1}{t}\,dt & (0 < x \le 1) \end{cases}$$

$g(x)$ no es continua en $x = 0$ ya que $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ no existe. La integral impropia en la definición de $f(x)$ ($x > 0$) es convergente, luego $f(x)$ es derivable si $x \neq 0$. Se va a demostrar que $f'(0)$ existe y es igual a cero, a saber, $f'(x) = g(x)$ para todo x.

Para $h > 0$, se tiene:

$$f(h) - f(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^h \operatorname{sen} \frac{1}{t}\,dt/h$$

$$= \left\{ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1/h}^{1/\varepsilon} \frac{1}{y^2} \operatorname{sen} y\,dy \right\} /h = b \int_b^\infty \frac{1}{y^2} \operatorname{sen} y\,dy \qquad \left(b = \frac{1}{h}\right)$$

$$= -\left.\frac{b\cos y}{y^2}\right]_b^\infty + b\int_b^\infty \frac{-2\cos y}{y^3}\,dy$$

$$= \frac{\cos b}{b} - 2b \int_b^{\infty} \frac{\cos y}{y^3}\, dy$$

Entonces

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| \leq \left| \frac{\cos b}{b} \right| + 2b \int_b^{\infty} \left| \frac{\cos y}{y^3} \right| dy \leq \frac{2}{b} \to 0 \binom{h \to 0}{b \to \infty}$$

Por lo tanto se tiene

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$$

Ejemplo 2

Se $R = \{x_n,\ n = 1,2,\ldots\}$ el conjunto de todos los números racionales en $[0, 1]$. Se define una función $f(x)$ como sigue:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t - x_n}\right) dt$$

La serie converge uniformemente en $[0, 1]$, luego $f(x)$ es una función contínua, y además las series

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x - x_n}\right), \text{ si } x \notin R.$$

$$g(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq k)}}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x - x_n}\right), \text{ si } x = x_k \in R.$$

converge uniformemente, por lo tanto

$$f'(x) = g(x).$$

Es decir, $f(x)$ es derivable en $[0, 1]$ pero $f'(x)$ no es contínua en R denso en toda parte.

De la manera más o menos análoga, se puede construir una fun-- ción derivable en toda parte de un intervalo pero su derivada no es integrable - Riemannn (The theory of function of a real variable, - E. W. Hobson,p 412 - p. 421).

La existencia de tales funciones complica la demostración de - varios teoremas del Análisis Matemático .

Por

YU TAKEUCHI.

CAMBIO DE NOMBRE

La Revista de Matemáticas Elementales, anuncia a sus lectores; que a partir de la próxima entrega, será editada con el nombre de:

R E V I S T A C O L O M B I A N A D E M A T E M A T I C A S