**Revista Colombiana de Matemáticas**
*Volumen* **29** *(1995), páginas 13–30*

# Soluciones positivas periódicas de algunos sistemas parabólicos vía el teorema de Kolesov

JOSÉ RAÚL QUINTERO
Universidad del Valle, Cali, Colombia

ABSTRACT. The problem of the existence of periodic positive solutions for general parabolic systems is studied by means of the Kolesov theorem and the monotone scheme. The special case of an epidemic model which involves difussion and a predator–prey problem is also examined.

*Keywords and phrases.* Parabolic and elliptic systems, supersolutions, subsolutions, monotone scheme, periodic solutions, Kolesov theorems, predator–prey models, epidemic models.

*1991 Mathematics Subject Classification.* Primary 35K50. Secondary 35B15.

RESUMEN. Se estudia el problema de la existencia de soluciones periódicas positivas para sistemas parabólicos generales mediante los teoremas del tipo Kolesov y el esquema monótono. Se considera el caso especial de un modelo de epidemias que incluye difusión y un modelo de competencia de especies predador–presa.

## 1. Introducción

Un modelo que describe el fenómeno de las epidemias bajo el efecto de la difusión es el sistema parabólico de reacción–difusión dado por

$$(A)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nabla.(D_1(x).\nabla u) = -au - c_1G(v)u + q_1(x) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} - \nabla(D_2(x).\nabla v) = -bv + c_2G(v)u + q_2(x) \end{cases} \qquad \text{en} \quad \Omega\times\mathbb{R}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado con frontera suave, $u$ , $v$ representan respectivamente la población susceptible y la población infectada, las constantes de reacción $a$, $b$, $c_1$, $c_2$ y los coeficientes de difusión $D_1$, $D_2$ son positivos, los factores externos $q_1$ y $q_2$ son no–negativos ($i = 1,2$), y $G(v)$ es la funcional definida por

$$G(v)(x,t) = \int_\Omega g(x,s)v(s,t)\,ds$$

donde $g$ es una función positiva y continua sobre $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ (véase [Or], [Pa], [Pi], [$Q_1$], [$Q_2$]).

Por otra parte, el fenómeno de competencia de especies del tipo Lotka–Volterra se describe mediante el sistema parabólico

$$(B) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = & u(a - a_1 u - a_2 v) \quad \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = & v(b - b_1 v + b_2 u) \quad \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R} \end{cases}$$

donde $a_i$, $b_i$, $a$ y $b$ son constantes positivas, $u, v$ representan las concentraciones de la presa y del depredador respectivamente, $a$ es la rata de crecimiento de la presa y $b$ la del depredador, y $a_i$, $b_i$ ($i = 1,2$) son los coeficientes de interacción entre dichas especies (véase [Le], [Ar]).

Los sistemas $(A)$ y $(B)$ se enmarcan dentro de una clase general de sistemas parabólicos de la forma

$$(C) \quad \begin{cases} L_1[u] & = f_1(-,-,u,v) \quad \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R} \\[1ex] L_2[v] & = f_2(-,-,u,v) \quad \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R} \end{cases}$$

donde los operadores diferenciales $L_1$ y $L_2$ son operadores uniformemente parabólicos y las funciones (operadores) $f_i$ ($i = 1,2$) tienen propiedades adecuadas de monotonía.

Los objetivos de este artículo son tres:

(1) Extender el teorema de comparación de Kolesov (véase [Ko]) al caso de un sistema de dos ecuaciones diferenciales parabólicas para demostrar la existencia de super y subsoluciones periódicas no triviales del problema bajo las condiciones de frontera

$$(D) \quad \begin{cases} L_1[u] = & f_1(-,-,u,v) \quad \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R} \\[1ex] L_2[v] = & f_2(-,-,u,v) \quad \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R} \\[1ex] u > 0, & v > 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R} \\[1ex] u \equiv 0, & v \equiv 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R} \end{cases}$$

a partir de funciones no necesariamente periódicas.

(2) Demostrar la existencia de soluciones periódicas del problema $(D)$, vía el esquema monótono (supersoluciones y subsoluciones).

(3) Construir super y subsoluciones del problema $(D)$ para garantizar la existencia de soluciones periódicas del problema, vía los teoremas de extensión del tipo de Kolesov (véase [Ko]).

## 2. Notaciones

En adelante, $\Omega$ será un dominio acotado con frontera suave en $\mathbb{R}^N$, $a$, $b$ serán números reales con $a < b$, y $D = \overline{\Omega} \times [a,b]$. Para toda función $u$ con dominio $D$ y $0 < \alpha < 1$, definimos

$$\|u\|_\infty^D = \sup_{(x,t)\in D} |u(x,t)|,$$

$$H_\alpha^D(u) = \sup_{\substack{(x_i,t_i)\in D \\ (x_1,t_1)\neq(x_2,t_2)}} \frac{|u(x_1,t_1) - u(x_2,t_2)|}{[|x_1 - x_2|^2 + |t_1 - t_2|]^{\alpha/2}}$$

$$\|u\|_\alpha^D = \|u\|_\infty^D + H_\alpha^D(u).$$

Si $H_\alpha^D(u) < +\infty$, diremos que $u \in C^\alpha(D)$. El conjunto $C^\alpha(D)$ con la norma $\|.\|_\alpha^D$ es un espacio de Banach. Denotaremos con $C^{1+\alpha}(D)$ el conjunto de funciones $u$ tales que $u \in C^\alpha(D)$ y $u_{x_i} \in C^\alpha(D)$ $(1 \leq i \leq N)$. Denotaremos con $C^{2+\alpha}(D)$ al conjunto de funciones $u$ tales que $u, u_t, u_{x_i}, u_{x_ix_j} \in C^\alpha(D)$ para $1 \leq i,j \leq N$. Los conjuntos $C^{1+\alpha}(D)$ y $C^{2+\alpha}(D)$ son espacios de Banach con las normas

$$\|u\|_{1+\alpha}^D = \|u\|_\alpha^D + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_\alpha^D, \qquad u \in C^{1+\alpha}(D),$$

$$\|u\|_{2+\alpha}^D = \|u\|_{1+\alpha}^D + \sum_{i,j=1}^N \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_\alpha^D, \quad u \in C^{2+\alpha}(D).$$

Diremos que $u \in C^\alpha(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) (u \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}), u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}))$, si $u \in C^\alpha(\overline{\Omega} \times I)$ $(u \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega} \times I), u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times I))$ para todo intervalo compacto $I \subseteq \mathbb{R}$.

Denotaremos con $\mathbb{F}$ al espacio de las funciones $f \in C^\alpha(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ tales que $f(x, t+T) = f(x,t)$ ($T$ es un número positivo fijo). $\mathbb{F}$ es un espacio de Banach con la norma,

$$\|f\|_{\mathbb{F}} = \|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega}\times[0,T])}.$$

Denotaremos con $\mathbb{E}$ al conjunto de las funciones $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ tales que $u(x, t+T) = u(x,t)$ y $u(x,t) = 0$ para todo $(x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$. $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{\mathbb{E}} = \|u\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}\times[0,T])}.$$

Con $L, L_1$ y $L_2$ denotaremos los operadores uniformemente parabólicos

$$L_i(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \left[\sum_{j,k=1}^{N} a_{jk}^{(i)}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} b_j^{(i)}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c^{(i)}(x,t)u\right]$$

$i = 1, 2$, y

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \left[\sum_{j,k=1}^{N} a_{jk}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} b_j(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x,t)u\right]$$

en $\Omega \times \mathbb{R}$, donde $c, c^{(i)} \leq 0$ en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ y $a_{jk}$, $a_{jk}^{(i)}$, $b$, $b_j^{(i)}$, $c$, $c^{(i)} \in \mathbb{F}$ para $1 \leq j$, $k \leq N$ e $i = 1, 2$.

Los operadores $\overline{L}_1$ *y* $\overline{L}_2$ denotaran operadores uniformemente elípticos en $\overline{\Omega}$ de la forma

$$\overline{L}_i(u) = \sum_{j,k=1}^{N} \overline{a}_{jk}^{(i)}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} \overline{b}_j^{(i)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \overline{c}^{(i)}(x)u$$

donde $\overline{c}^{(i)} \leq 0$ $(i = 1, 2)$ en $\overline{\Omega}$ y $a_{jk}^{(i)}$, $b_j^{(i)}$, $c^{(i)} \in C(\overline{\Omega})$ para $1 \leq j$, $k \leq N$ e $i = 1, 2$.

## 3. Teoremas de extensión del tipo de Kolesov

**Definición 3.1** (Supersoluciones y subsoluciones). Sean $\tilde{u}_i$, $u_i \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, $T$-periódicas $(i = 1, 2)$. Diremos que las parejas $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ y $(u_1, u_2)$ son supersoluciones y subsoluciones de $(D)$, respectivamente, si satisfacen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
L_1[\tilde{u}_1] - f_1(-,-,\tilde{u}_1, u_2) &\geq 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R} \\
L_1[u_1] - f_1(-,-,u_1, \tilde{u}_2) &\leq 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R} \\
L_2[\tilde{u}_2] - f_2(-,-,\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) &\geq 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R} \\
L_2[u_2] - f_2(-,-,u_1, u_2) &\leq 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R} \\
\tilde{u}_i \geq u_i \geq 0 & \quad\quad\quad \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R} \\
\tilde{u}_i \geq 0 \geq u_i & \quad\quad\quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Los resultados que vamos a presentar en esta sección permiten demostrar la existencia de supersoluciones y de subsoluciones periódicas del problema $(D)$, a partir de funciones no necesariamente periódicas. Estos resultados son consecuencia del siguiente teorema de comparación de Kolesov (véase [Ko]).

**Teorema de Kolesov.** *Sea $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave tal que $F(-, t+T, -) = F(-, t, -)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y que $F(-, -, r) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ para $r \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. Si existen funciones $v, w \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, T_1])$ con $T_1 > T$ tales que*

$$L[v] \geq F(-, -, v) \qquad \text{en } \overline{\Omega} \times [0, T_1],$$

$$L[w] \leq F(-, -, w) \qquad \text{en } \overline{\Omega} \times [0, T_1],$$

$$v(x, 0) \geq v(x, T), w(x, 0) \leq w(x, T) \qquad \text{sobre } \overline{\Omega},$$

$$v(x, t) \geq 0 \geq w(x, t) \qquad \text{sobre } \partial\Omega \times [0, T_1],$$

$$w(x, 0) \leq v(x, 0) \qquad \text{en } \overline{\Omega},$$

*entonces el problema parabólico periodico*

$$\begin{cases} L[u] = F(-, -, u) & \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R} \\ u \in \mathbb{E} \end{cases}$$

*tiene por lo menos una solución. Más aún, $w \leq u \leq v$ en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.*

En lo que sigue, $f_i : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1,\ 2)$ serán funciones suaves tales que:

(1) $f_i(-, t+T, -, -) = f_i(-, t, -, -)$ $(i = 1, 2)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
(2) Si $r, s \in \mathbb{F}$ , entonces $f_i(-, -, r, s) \in \mathbb{F}$ $(i = 1,\ 2)$.

**Teorema 3.1.** *Sean $T_1 > T$ y $M_1$ y $M_2$ constantes no–negativas tales que $f_1(-, -, r, s) + M_1 r$ es monótona no–creciente y $f_2(-, -, r, s) + M_2 s$, monótona no–decreciente, en $r$ y $s$. Si existen funciones $\overline{U}, \underline{U}, \underline{V}$ en $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times [0, T_1])$ y una constante positiva $\overline{R}$ tales que*

$$L_1[\overline{U}] \quad \geq \quad f_1(-, -, \overline{U}, \underline{V}) \quad \text{en} \quad \Omega \times [0, T_1],$$

$$L_1[\underline{U}] \quad \leq \quad f_1(-, -, \underline{U}, \overline{R}) \quad \text{en} \quad \Omega \times [0, T_1],$$

$$L_2[\overline{R}] \quad \geq \quad f_2(-, -, \overline{U}, \overline{R}) \quad \text{en} \quad \Omega \times [0, T_1],$$

$$L_2[\underline{V}] \quad \leq \quad f_2(-, -, \underline{U}, \underline{V}) \quad \text{en} \quad \Omega \times [0, T_1],$$

$$\overline{U}(x,0) \geq \overline{U}(x,T), \quad \underline{U}(x,0) \leq \underline{U}(x,T), \quad \underline{V}(x,0) \leq \underline{V}(x,T) \quad con \quad x \in \overline{\Omega},$$

$$\underline{U}(x,0) \leq \overline{U}(x,0), \quad \underline{V}(x,t) \leq \overline{R} \quad con\ x \in \overline{\Omega},\ t \in [0,T_1],$$

$$\overline{U}(x,t) \geq 0 \geq \underline{U}(x,t), \quad 0 \geq \underline{V}(x,t) \quad con \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T_1].$$

*entonces existen funciones* $\tilde{u}_i$, $u_i \in \mathbb{E}$, $i = 1, 2$, *tales que las parejas* $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ *y* $(u_1, u_2)$ *son respectivamente supersoluciones y subsoluciones* $T$*-periódicas del problema* $(D)$.

*Demostración.* Consideremos las funciones

$$g_1(x,t,r,s) = f_1(x,t,r,s) + M_1 r$$

$$g_2(x,t,r,s) = f_2(x,t,r,s) + M_2 s.$$

Entonces $g_1$ es monótona no–creciente y $g_2$, monótona no–decreciente, en $r$ y $s$.

Sea $h_1(x,t,r) = g_1(x,t,r,\overline{R}) - M_1 r = f_1(x,t,r,\overline{R})$. Un cálculo sencillo muestra que

$$L_1[\,\overline{U}\,](x,t) \geq h_1(x,t,\overline{U}) \quad \text{y} \quad L_1[\,\underline{U}\,](x,t) \leq h_1(x,t,\underline{U}).$$

En virtud del teorema de comparación de Kolesov antes mencionado, existe $u_1 \in \mathbb{E}$ tal que $\underline{U} \leq u_1 \leq \overline{U}$, y que

$$L_1[u_1](x,t) = f_1(x,t,u_1,\overline{R}).$$

Si ahora tomamos $h_2(x,t,s) = g_2(x,t,u_1,s) - M_2 s$, se demuestra de manera completamente análoga que existe $u_2 \in \mathbb{E}$ tal que $\underline{V} \leq u_2 \leq \overline{R}$ y que

$$L_2[u_2](x,t) = f_2(x,t,u_1,u_2).$$

Sea $h_3(x,t,r) = g_1(x,t,r,u_2) - M_1 r$. De nuevo, el teorema de Kolesov garantiza que existe $\tilde{u}_1 \in \mathbb{E}$ tal que $\underline{U} \leq \tilde{u}_1 \leq \overline{U}$ y que

$$L_1[\tilde{u}_1](x,t) = f_1(x,t,\tilde{u}_1,u_2).$$

Ahora,

$$\begin{aligned} L_1[\tilde{u}_1 - u_1](x,t) &= g_1(x,t,\tilde{u}_1,u_2) - g_1(x,t,u_1,\overline{R}) - M_1(\tilde{u}_1 - u_1)(x,t) \\ &\geq g_1(x,t,\tilde{u}_1,\overline{R}) - g_1(x,t,u_1,\overline{R}) - M_1(\tilde{u}_1 - u_1)(x,t), \end{aligned}$$

y por el teorema del Valor Medio, existirá $\eta$ entre $\tilde{u}_1$ y $u_1$ tal que

$$\left\{ L_1 + \left[ -\frac{\partial g_1}{\partial r}(-,-,\eta,\overline{R}) + M_1 \right] \right\} (\tilde{u}_1 - u_1) \geq 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times (0,T_1).$$

Dado que $\dfrac{\partial g_1}{\partial r}(-,-,r,-) - M_1 \leq 0$ y $\tilde{u}_1 - u_1 \equiv 0$ sobre $\partial\Omega \times \mathbb{R}$, el principio del máximo garantiza entonces que $\tilde{u}_1 \geq u_1$ en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ (véase [Pw, pág. 173]).

Sea, finalmente, $h_4(x,t,s) = g_2(x,t,\tilde{u}_1,\overline{R}) - M_2 s$. Entonces

$$L_2[\,\overline{R}\,](x,t) \geq h_4(x,t,\overline{R}) \quad \text{y} \quad L_2[\,\underline{V}\,](x,t) \leq h_4(x,t,\underline{V}),$$

y por lo tanto, existe $\tilde{u}_2 \in \mathbb{E}$ tal que $\underline{V} \leq \tilde{u}_2 \leq \overline{R}$, que

$$L_2[\tilde{u}_2](x,t) = g_2(x,t,\tilde{u}_1,\overline{R}) - M_2\tilde{u}_2(x,t).$$

y además, que

$$L_2[\tilde{u}_2 - u_2](x,t) \geq g_2(x,t,\tilde{u}_1,\overline{R}) - g_2(x,t,u_1,\overline{R}) - M_2(\tilde{u}_2 - u_2)(x,t).$$

Del hecho de que $g_2(-,-,r,-)$ es monótona no–decreciente se deduce entonces que

$$\{L_2 + M_2\}(\tilde{u}_2 - u_2) \geq 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times (0,T_1),$$

y, puesto que $\tilde{u}_2 - u_2 \equiv 0$ en $\partial\Omega \times \mathbb{R}$, el principio del máximo garantiza que

$$\tilde{u}_2 \geq u_2 \quad \text{en} \quad \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Las parejas $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ y $(u_1, u_2)$ son entonces respectivamente super y subsoluciones $T$-periódicas del problema $D$. □

**Observación.** La técnica utilizada en la anterior demostración se puede adaptar al caso en que los $f_i$ $(i = 1,\ 2)$ sean operadores sobre el espacio $\mathbb{F}$. En efecto, sean $F_i : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ $(i = 1,2)$ operadores continuos y $H_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$ funciones suaves con las siguientes propiedades:

(*i*) Si $v > 0$, entonces $F_1(v) < 0,\ F_2(v) > 0$

(*ii*) Si $\overline{v} \geq \underline{v}$, entonces $F_1(\overline{v}) \leq F_1(\underline{v}),\ F_2(\overline{v}) \geq F_2(\underline{v})$

(*iii*) Si $r \in \mathbb{R}$, entonces $F_i(r) : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}\ (i = 1,2)$ y $F_1(0) < 0$ en $\overline{\Omega}$.

(*iv*) Las funciones $H_1$ y$H_2$ son monótonas no–decrecientes y $H_i(0) = 0$ $(i = 1,2)$.

Se tiene entonces el siguiente teorema para un modelo descrito por ecuaciones parabólicas que generaliza el sistema $(A)$.

**Teorema 3.2.** *Sean $T_1 > T$ y $q_i \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ $(i = 1,2)$. Si existen funciones $\overline{U}, \underline{U}, \underline{V}$ en $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times [0,T_1])$ y una constante positiva $\overline{R}$ tales que*

$$\begin{aligned}
L_1[\,\overline{U}\,] &\geq F_1(\underline{V})H_1(\overline{U}) + q_1 && \text{en} \quad \Omega \times [0,T_1],\\
L_1[\,\underline{U}\,] &\leq F_1(\overline{R})H_1(\underline{U}) + q_1 && \text{en} \quad \Omega \times [0,T_1],\\
L_2[\,\overline{R}\,] &\geq -b\overline{R} + F_2(\overline{R})H_2(\overline{U}) + q_2 && \text{en} \quad \Omega \times [0,T_1],\\
L_2[\,\underline{V}\,] &\leq -b\underline{V} + F_2(\underline{V})H_2(\underline{U}) + q_2 && \text{en} \quad \Omega \times [0,T_1],
\end{aligned}$$

$$\overline{U}(x,0) \geq \overline{U}(x,T), \qquad \underline{U}(x,0) \leq \underline{U}(x,T),\ \underline{V}(x,0) \leq \underline{V}(x,T) con\ x \in \overline{\Omega},$$

$$\underline{U}(x,0) \leq \overline{U}(x,0), \qquad \underline{V}(x,t) \leq \overline{R} \quad con\ x \in \overline{\Omega},\ t \in [0,T_1],$$

$$\overline{U}(x,t) \geq 0 \geq \underline{U}(x,t), \quad 0 \geq \underline{V}(x,t), \qquad con\ (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T_1],$$

*entonces existen funciones $\tilde{u}_i$, $u_i \in \mathbb{E}$ tales que las parejas $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ y $(u_1, u_2)$ son super y subsoluciones $T$-periódicas del problema $D$ con*

$$f_1(-,-,r,s) = F_1(s)H_1(r) + q_1(-)$$
$$f_2(-,-,r,s) = -bs + F_2(s)H_2(r) + q_2(-), \quad r,\ s \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}).$$

La demostración se basa en argumentos similares a los usados en la demostración del Teorema 3.1. En este caso es necesario definir las funciones $h_i$ por

$$\begin{array}{rcl} h_1(x,t,r) & = & F_1(\overline{R})(x)H_1(r) + q_1(x), \\ h_2(x,t,s) & = & -bs + F_2(\overline{R})(x)H_2(u_1)(x,t) + q_2(x), \\ h_3(x,t,r) & = & F_1(u_2)(x,t)H_1(r) + q_1(x), \\ h_4(x,t,s) & = & -bs + F_2(\overline{R})(x)H_2(\tilde{u}_1)(x,t) + q_2(x), \end{array}$$

donde las funciones $\tilde{u}_i, u_i \in \mathbb{E}$ $(i = 1,2)$ satisfacen

$$\begin{array}{rcl} L_1[u_1] & = & F_1(\overline{R})H_1(u_1) + q_1, \\ L_2[u_2] & = & -bu_2 + F_2(\overline{R})H_2(u_1) + q_2, \\ L_1[\tilde{u}_1] & = & F_1(u_2)H_1(\tilde{u}_1) + q_1, \\ L_2[\tilde{u}_2] & = & -b\tilde{u}_2 + F_2(\overline{R})H_2(\tilde{u}_1) + q_2. \end{array}$$

Más aún, los mismos argumentos anteriores demuestran fácilmente que

$$\underline{U} \leq u_1 \leq \tilde{u}_1 \leq \overline{U} \quad \text{y} \quad \underline{V} \leq u_2 \leq \tilde{u}_2 \leq \overline{R} \quad \text{en} \quad \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Nuestro siguiente resultado está relacionado con el modelo de competencia de especies del tipo Lotka–Volterra.

**Teorema 3.3.** *Sean $T_1 > T$ y $M_1$ y $M_2$ constantes no–negativas tales que $f_1(-,-,r,s) - M_1 r$ es monótona no–creciente y $f_2(-,-,r,s) + M_2 s^2$, monótona no–decreciente, en $r$ y $s$. Si existen funciones $\overline{U}, \underline{U}, \underline{V}$ en $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times [0,T_1])$ y una constante positiva $\overline{R}$ que satisfagan las desigualdades del Teorema 3.1, entonces existen funciones $\tilde{u}_i, u_i \in \mathbb{E}$ tales que las parejas $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ y $(u_1, u_2)$ son respectivamente supe y subsoluciones $T$-periódicas del problema $(D)$.*

*Demostración.* Consideremos las funciones

$$g_1(x,t,r,s) = f_1(x,t,r,s) - M_1 r$$

$$g_2(x,t,r,s) = f_2(x,t,r,s) + M_2 s^2.$$

Entonces $g_1$ es monótona no–creciente y $g_2$ es monótona no–decreciente en $r$ y $s$.

Como en el Teorema 3.1, existen funciones $u_i \in \mathbb{E}$ $(i = 1, 2)$ tales que $\underline{U} \leq u_1 \leq \overline{U}$ , $\underline{V} \leq u_2 \leq \overline{R}$ y que

$$L_1[u_1](x,t) = f_1(x,t,u_1,\overline{R}) \quad \text{y} \quad L_2[u_2](x,t) = f_2(x,t,u_1,u_2).$$

En virtud del teorema de existencia de soluciones para el caso lineal (véase [Sm]), existe $\tilde{u}_1 \in \mathbb{E}$ tal que $L_1[\tilde{u}_1] = f_1(-,-,u_1,u_2)$. Ahora,

$$\begin{aligned} L_1[\tilde{u}_1 - u_1] &= f_1(-,-,u_1,u_2) - f_1(-,-,u_1,\overline{R}) \\ &= g_1(-,-,u_1,u_2) - g_1(-,-,u_1,\overline{R}) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

y además, $\tilde{u}_1 - u_1 \equiv 0$ sobre $\partial\Omega \times \mathbb{R}$. Del principio del máximo se deduce entonces que $\tilde{u}_1 \geq u_1$ en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ (véase [Pw, pag. 173]).

Sea $h(x,t,s) = g_2(x,t,\tilde{u}_1,\overline{R}) - M_2 s^2$. Entonces,

$$L_2\left[\,\overline{R}\,\right](x,t) \geq h(x,t,\overline{R}) \quad \text{y} \quad L_2\left[\,\underline{V}\,\right](x,t) \leq h(x,t,\underline{V}).$$

Por lo tanto, existe $\tilde{u}_2 \in \mathbb{E}$ tal que $\underline{V} \leq \tilde{u}_2 \leq \overline{R}$ y que

$$L_2[\tilde{u}_2](x,t) = g_2(x,t,\tilde{u}_1,\overline{R}) - M_2\tilde{u}_2^2(x,t).$$

Del hecho de que $g_2(-,-,r,-)$ es monótona no–decreciente podemos concluir entonces que

$$\begin{aligned} L_2[\tilde{u}_2 - u_2](x,t) &= g_2(x,t,\tilde{u}_1,\overline{R}) - g_2(x,t,u_1,u_2) - M_2(\tilde{u}_2^2 - u_2^2)(x,t) \\ &\geq -M_2(\tilde{u}_2 + u_2)(\tilde{u}_2 - u_2)(x,t). \end{aligned}$$

de donde

$$\{L_2 + M_2(\tilde{u}_2 + u_2)\}(\tilde{u}_2 - u_2) \geq 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times (0, T_1),$$

y puesto que $\tilde{u}_2 - u_2 \equiv 0$ en $\partial\Omega \times \mathbb{R}$, el principio del máximo garantiza que

$$\tilde{u}_2 \geq u_2 \quad \text{en} \quad \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, las parejas $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ y $(u_1, u_2)$ son super y subsoluciones $T$-periódicas del problema $(D)$. □

**Observación.** Un aspecto interesante de los anteriores resultados es que nos permiten obtener soluciones periódicas a partir de funciones no necesariamente periódicas. En consecuencia, para este tipo de problemas podemos adoptar definiciones de supersolución y subsolución menos restrictivas. Por ejemplo, es suficiente tomar como definición funciones que satisfagan las hipótesis de los teoremas anteriormente demostrados.

## 4. Lema preliminar

En el siguiente lema vamos a suponer que las funciones (u operadores) $f_1$ y $f_2$ satisfacen las condiciones de monotonía de los Teoremas 3.1, 3.2, 3.3.

**Lema 4.1** *Si* $u_i$ , $\tilde{u}_i \in \mathbb{E}$ $(i = 1, 2)$ *con* $\tilde{u}_i \geq u_i \geq 0$ *en* $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ $(i : 1, 2)$ *son tales que:*

$$\begin{aligned} L_1[\tilde{u}_1] &\geq f_1(-, -\tilde{u}_1, u_2), \\ L_1[u_1] &\leq f_1(-, -, u_1, \tilde{u}_2), \\ L_2[\tilde{u}_2] &\geq f_2(-, -, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2), \\ L_2[u_2] &\leq f_2(-, -, u_1, u_2), \end{aligned}$$

*entonces existe una solución* $(u, v)$ *de* $(D)$ *con* $u,\ v \in \mathbb{E}$. *Además* $0 \leq u_1 \leq u \leq \tilde{u}_1$ *y* $0 \leq u_2 \leq v \leq \tilde{u}_2$ *en* $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.

*Demostración.* Supongamos que las $f_i$ satisfacen las hipótesis del Teorema 3.1. Consideremos el problema adicional

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{L}_1[u] = g_1(-, -, \rho(u), \sigma(v)) \\ \tilde{L}_2[v] = g_2(-, -, \rho(u), \sigma(v)) \\ u,\ v \in \mathbb{E} \end{array} \right. \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}$$

donde

$$\sigma(v) = \begin{cases} v, & u_2 \leq v \leq \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_2, & v > \tilde{u}_2 \\ u_2, & v < u_2 \end{cases}$$

$$\rho(u) = \begin{cases} u, & u_1 \leq u \leq \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_1, & u > \tilde{u}_1 \\ u_1, & u < u_1 \end{cases}$$

y $\tilde{L}_i = L_i + M_i$ $(i = 1, 2)$.

Sea $A = \{h \in \mathbb{F} : h \equiv 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}\}$ y $\overline{A} = A \times A$. Si $(u, v) \in \overline{A}$, definimos $\|(u, v)\|_{\overline{A}} = \max\{\|u\|_{\mathbb{F}}, \|v\|_{\mathbb{F}}\}$. Entonces, $(\overline{A}, \|\cdot\|_{\overline{A}})$ es un espacio de Banach. Por otro lado, los operadores $\tilde{L}_i : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ son invertibles con inversa continua $\tilde{L}_i^{-1} : A \longrightarrow \mathbb{E}$ $(i = 1, 2)$. Sea $X : \overline{A} \longrightarrow \overline{A}$ dado por

$$X(u, v) = \Big(i \circ \tilde{L}_1^{-1}\big[g_1(-, -, \rho(u), \sigma(v))\big],\ i \circ \tilde{L}_2^{-1}\big[g_2(-, -, \rho(u), \sigma(v))\big]\Big),$$

donde $i : E \longrightarrow A$ es el operador de inclusión (el cual es compacto). Ahora, las condiciones de monotonía de las funciones $g_i$ $(i = 1, 2)$ y las definiciones de

$\rho(-)$ y $\sigma(-)$ garantizan que para todo $(u,v) \in \overline{A}$,

$$g_1(-,-,\tilde{u}_1,-) \le g_1(-,-,\rho(u),-) \le g_1(-,-,u_1,-),$$
$$g_2(-,-,-,u_2) \le g_2(-,-,-,\sigma(v)) \le g_2(-,-,-,\tilde{u}_2).$$

En consecuencia, existe $R_1 > 0$ tal que

$$\left\|g_i(-,-,\rho(u),\sigma(v))\right\|_{\infty}^{\overline{\Omega}\times\mathbb{R}} \le R_1,$$

para todo $(u,v) \in \overline{A}$.

Por otra parte, de [Or, Teorema 0.03], existe una constante $k > 0$ tal que para $i = 1,2$ y todo $(u,v) \in \overline{A}$,

$$\left\|\tilde{L}_i^{-1}\left[g_i(-,-,\rho(u),\sigma(v))\right]\right\|_{1+\alpha} \le k\left\|g_i(-,-,\rho(u),\sigma(v))\right\|_{\infty} \le kR_1 = R.$$

Entonces

$$\left\|\tilde{L}_i^{-1}(g_i(-,-,\rho(u),\sigma(v))\right\|_{\mathbb{F}} \le R, \quad (u,v) \in \overline{A}, \quad i = 1,2.$$

Por lo tanto, $\|X(u,v)\|_{\overline{A}} \le R$ para todo $(u,v) \in \overline{A}$. Entonces $X(B_R(0)) \subseteq B_R(0)$, $(B_R(0) = \{(u,v) \in \overline{A} : \|(u,v)\|_{\overline{A}} \le R\})$, dado que el operador $X$ es compacto, concluimos, vía el teorema de punto fijo de Schauder, que existe $(u,v) \in \overline{A}$ tal que

$$X(u,v) = (u,v).$$

Esto es,

$$\tilde{L}_1[u] = g_1(-,-,\rho(u),\sigma(v)),$$
$$\tilde{L}_2[u] = g_2(-,-,\rho(u),\sigma(v)).$$

A continuación demostraremos que $u_1 \le u \le \tilde{u}_1$ y que $u_2 \le v \le \tilde{u}_2$. Para ello, observemos en primer lugar que la monotonía de las función $g_2$ garantiza que

$$\tilde{L}_2[\tilde{u}_2 - v] \ge g_2(-,-,\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) - g_2(-,-,\rho(u),\sigma(v)) \ge 0 \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}.$$

y que

$$\tilde{L}_2[v - u_2] = g_2(-,-,\rho(u),\sigma(v)) - g_2(-,-,u_1,u_2) \le 0 \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}.$$

Además, $\tilde{u}_2 - v \equiv v - u_2 \equiv 0$ sobre $\partial\Omega \times \mathbb{R}$. Del principio del máximo y de los hechos anteriores se deduce entonces que

$$\tilde{u}_2 \ge v \ge u_2 \quad \text{en } \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Para demostrar que $u \le \tilde{u}_1$ en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un punto $(x_o,t_o) \in \Omega \times (-T,T)$ tal que $u(x_o,t_o) > \tilde{u}_1(x_o,t_o)$, y sea $\Omega_o$ el conjunto definido por

$$\Omega_o = \{(x,t) \in \Omega \times (-T,T) : u(x,t) - \tilde{u}_1(x,t) > 0\} \neq \varnothing.$$

De la continuidad de la función $u - \tilde{u}_1$ se deduce que $\Omega_o$ es un abierto y que $u - \tilde{u}_1 \equiv 0$ sobre $\partial\Omega_o$. Sea $C$ una componente conexa de $\Omega_o$ que contiene a

$(x_o, t_o)$. Entonces $\partial C \subseteq \partial\Omega_o$. Más aún, $u - \tilde{u}_1 \equiv 0$ sobre $\partial C$. De la definición de $C$ y del hecho de que la función $g_1$ es monótona no–creciente se obtiene que

$$\begin{aligned}\tilde{L}_1[\tilde{u}_1 - u] &= g_1(-,-,\tilde{u}_1,u_2) - g_1(-,-,\rho(u),\sigma(v))\\ &= g_1(-,-,\tilde{u}_1,u_2) - g_1(-,-,\tilde{u}_1,\sigma(v))\\ &\qquad\qquad (\rho(u) = \tilde{u}_1, \text{ pues } u > \tilde{u}_1 \text{ en } C)\\ &\geq 0\end{aligned}$$

y del principio del Máximo, que $\tilde{u}_1 \geq u$ en $C \subseteq \Omega_o$. Esta contradicción demuestra que $\tilde{u}_1 \geq u$ en $\Omega \times \mathbb{R}$. Utilizando un argumento similar se demuestra que $u_1 \leq u$ en $\Omega \times \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$u_1 \leq u \leq \tilde{u}_1 \quad \text{en } \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

En conclusión, $\rho(u) = u$ y $\sigma(v) = v$, así que la pareja $(u, v)$ con $u, v \in \mathbb{E}$ es una solución $T$-periódica del problema $(D)$ tal que

$$u_1 \leq u \leq \tilde{u}_1 \;\text{ y }\; u_2 \leq v \leq \tilde{u}_2 \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}.$$

Si $f_1$ y $f_2$ satisfacen las condiciones de monotonía del Teorema 3.3, utilizando los mismos argumentos anteriores se demuestra que existen $u, v \in \mathbb{E}$, soluciones de problema auxiliar

$$\left\{\begin{array}{l} L_1[u] = f_1(-,-,\rho(u),\sigma(v)),\\ \\ L_2[v] = f_2(-,-,\rho(u),\sigma(v)).\end{array}\right. \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}$$

Un nuevo argumento por contradicción permite entonces concluir que $\rho(u) = u$ y $\sigma(v) = v$. En consecuencia, la pareja $(u, v)$ es una solución $T$-periódica del problema $(D)$ tal que

$$u_1 \leq u \leq \tilde{u}_1 \;\text{ y }\; u_2 \leq v \leq \tilde{u}_2 \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}.$$

Cuando

$$\begin{aligned} f_1(-,-,r,s) &= F_1(s)H_1(r) + q_1(-) \quad \text{y}\\ f_2(-,-,r,s) &= -bs + F_2(s)H_2(r) + q_2(-), \quad r,s \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}),\end{aligned}$$

el resultado se obtiene directamente de los argumentos anteriores. En este caso $g_1 \equiv f_1$ y $M_2 = b$. $\square$

**Observación.** El anterior lema sigue siendo válido si suponemos que

$$f_1(-,-,r,s) = F_1(s)H_1(r) + q_1(-) \quad \text{y}$$

$$f_2(-,-,r,s) = -bs + F_2(s)H_2(r) + q_2(-), \quad r,s \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$$

donde $H_i$ $(i = 1,2)$ son operadores de $\mathbb{F}$ en si mismo con las siguientes propiedades:

(*i*) Si $v \geq 0$, entonces $H_i(v) \geq 0$ $(i = 1, 2)$.

(*ii*) Si $\overline{v} \geq \underline{v}$, entonces $H_i(\overline{v}) \geq H_i(\underline{v})$ $(i = 1, 2)$.

Más aún, el resultado también vale si $H_1$ y $H_2$ son combinaciones de ambos. Es decir, $H_1$ podría ser una función y $H_2$ podría ser un operador, o viceversa. En cualquiera de estos casos la demostración es la misma.

## 5. Teoremas de Existencia

Los resultados anteriores muestran la conveniencia de construir super y sub-soluciones $T$–periódicas para establecer la existencia de soluciones del problema $(D)$.

**5.1. Modelo de Epidemias.** Sean

$$\begin{aligned} f_1(-,-,r,s) &= F_1(s)H_1(r) + q_1(-), \\ f_2(-,-,r,s) &= -bs + F_2(s)H_2(r) + q_2(-), \quad r, s \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}), \end{aligned}$$

donde $b > 0$ y $q_i \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Supongamos que existe un número real positvo $M$ tal que $\sup_{t \in \mathbb{R}} H_1' \leq M$.

(a) Caso $q_1 > 0$ y $q_2 > 0$.

Sean $\overline{a} > 0, k > 0$ y $q_2 \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ con $q_2 > 0$ en $\overline{\Omega}$, dados. Escójanse $b > 0$ y $q_1 \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ con $q_1 > 0$ en $\overline{\Omega}$ $(i = 1, 2)$ tales que

$$\begin{aligned} -F_1(0)H_1(\overline{a}) - q_1 &\geq 0, \\ kb - F_2(k)H_2(\overline{a}) - q_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Sean $\lambda_i$ y $\Phi_i$ $(i = 1, 2)$ los primeros valores propios positivos y las primeras funciones propias positivas de los problemas

$$(V.P.1) \quad \begin{cases} L_1[\Phi] - F_1(k)\Phi &= \lambda\Phi \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}. \\ \Phi &> 0 \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}. \\ \Phi &\in \mathbb{E}, \end{cases}$$

y

$$(V.P.2) \quad \begin{cases} L_2[\Phi] + b\Phi &= \lambda\Phi \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}. \\ \Phi &> 0 \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}. \\ \Phi &\in \mathbb{E}. \end{cases}$$

(véase [La, Teorema 1]).

Elíjanse números positivos $\alpha_1$ y $\alpha_2$ tales que

$$\alpha_1 \|\Phi_1\|_\infty^{\overline{\Omega}\times\mathbb{R}} \leq \overline{a},$$

$$\alpha_2 \|\Phi_2\|_\infty^{\overline{\Omega}\times\mathbb{R}} \leq k,$$

$$\alpha_2\lambda_2 \|\Phi_2\|_\infty^{\overline{\Omega}\times\mathbb{R}} \leq q_2,$$

$$\alpha_1 \|\Phi_1\|_\infty^{\overline{\Omega}\times\mathbb{R}} \{\lambda_1 - F_1(k)M\} \leq q_1,$$

y defínanse las funciones

$$\tilde{u}_1 \equiv \overline{a}\ ,\ \tilde{u}_2 \equiv k,\ u_i = \alpha_i \Phi_i \quad (i = 1, 2).$$

Bajo las anteriores condiciones se puede verificar que las parejas $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ y $(u_1, u_2)$ son respectivamente super y subsoluciones de $(D)$. Más aún,

$$\tilde{u}_1 \geq u_1 \geq 0,\ \tilde{u}_2 \geq u_2 \geq 0 \text{ en } \Omega \times \mathbb{R},$$

$$\tilde{u}_i \geq 0,\ u_i \equiv 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}.$$

En realidad hemos demostrado el siguiente resultado,

**Teorema 5.1.** *Sean $\overline{a} > 0, k > 0$ y $q_2 \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ con $q_2 > 0$ en $\overline{\Omega}$ . Si $b > 0$ y $q_1 \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ con $q_1 > 0$ en $\overline{\Omega}$ $(i = 1, 2)$ son tales que*

$$\begin{aligned} -F_1(0)H_1(\overline{a}) - q_1 &\geq 0, \\ kb - F_2(k)H_2(\overline{a}) - q_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

*entonces el problema*

$$\begin{cases} L_1[u] = \quad F_1(v)H_1(u) + q_1(x) & \\ & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ L_2[v] = \quad -bv + F_2(v)H_2(u) + q_2(x) & \\ & \\ u > 0, \qquad v > 0 & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \end{cases}$$

*tiene al menos una solución $(u, v)$ con $u, v \in \mathbb{E}$ tales que $\alpha_1\Phi_1 \leq u \leq \tilde{a}$ y $\alpha_2\Phi_2 \leq v \leq k$ en $\Omega \times \mathbb{R}$, donde $\Phi_i$ $(i = 1, 2)$ denota la primera función propia del problema $(V.P.i)$.*

Dado que las super y subsoluciones pertenecen al espacio $\mathbb{E}$, no es necesario en este caso utilizar el Teorema 3.2. La demostración se obtiene directamente a partir del Lema 4.1.

**(b) Caso $q_1 > 0$ y $q_2 \equiv 0$.**

En este caso consideraremos el problema $(D)$ para la clase de operadores uniformemente parabólicos dados por

$$L_i = \frac{\partial}{\partial t} - \overline{L}_i \ (i = 1, 2),$$

donde $\overline{L}_i$ es un operador uniformemente elíptico en $\overline{\Omega}$ (Sección 2).

Sea $k > 0$ una constante fija. Sean $\lambda$ y $\Phi$, respectivamente, el primer valor propio positivo y la primera función propia positiva del problema elíptico

$$(V.P.E) \quad \begin{cases} -\overline{L}_1[\Phi] - F_1(k)\Phi & = \lambda\Phi \quad \text{en } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad \Phi & > 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad \Phi & \equiv 0 \quad \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Sean $q_1 > 0$ en $\overline{\Omega}$ y $\alpha > 1$, y escójase un número real $\rho > 0$ tal que

$$\begin{array}{lll} \alpha q_1 & \geq & 2\rho e^{\alpha T_1}(\lambda + F_1(k))\|\Phi\|_\infty \\ q_1 & \geq & 2\rho e^{\alpha T_1}\|\phi\|_\infty \\ q_1 & \geq & \rho e^{\alpha T_1}(\lambda + \alpha - F_1(k)M)\|\Phi\|_\infty . \end{array}$$

Sea $U_1 \in \mathbb{E}$ la solución del problema lineal parabólico

$$\begin{cases} \left\{\dfrac{\partial}{\partial t} - \overline{L}_1\right\}[U] & = \quad \alpha q_1, \qquad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}, \\ U > 0, & \qquad\qquad\qquad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

(véase [Sm]), y sea $b > 0$ tal que $kb - F_2(k)H_2(\|U_1\|_\infty) \geq 0$.

Sean ahora $\tilde{u}_1 \equiv U_1$, $u_1 \equiv \rho e^{\alpha t}\Phi$, $u_2 \equiv 0$, $\tilde{u}_2 \equiv k$. Como en el caso anterior, se puede verificar que las parejas $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ y $(u_1, u_2)$ son super y subsoluciones respectivas de $(D)$. Por lo tanto,

**Teorema 5.2.** *Si $k > 0$ y $q_1 \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ con $q_1 > 0$ en $\overline{\Omega}$, y si $b > 0$ es tal que*

$$kb - F_2(k)H_2(\|U_1\|_\infty) \geq 0,$$

*entonces el problema*

$$\begin{cases} \left\{\dfrac{\partial}{\partial t} - \overline{L}_1\right\}[u] = F_1(v)H_1(u) + q_1(x) & \\ & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ \left\{\dfrac{\partial}{\partial t} - \overline{L}_2\right\}[v] = -bv + F_2(v)H_2(u) & \\ u > 0, \qquad\qquad v > 0 & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \end{cases}$$

*tiene al menos una solución $(u, v)$ con $u, v \in \mathbb{E}$ tales que $\rho e^{\alpha t}\Phi \leq u \leq U_1$ y $0 \leq v \leq k$ en $\Omega \times \mathbb{R}$, donde $\Phi$ denota la primera función propia del problema $(V.P.E)$.*

*Demostración.* Consecuencia inmediata del Teorema 3.2 y del Lema 4.1.

**Observaciones.**

(1) El anterior teorema de existencia tiene aplicaciones inmediatas a la teoría de las epidemias. En efecto, el modelo matemático que describe el fenómeno de epidemias bajo condiciones especiales viene dado por el sistema de dos ecuaciones de Reacción–Difusión,

$$\begin{aligned} \widehat{L}_1[u] &= -au - c_1G(v)u + q_1(x) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{en } \Omega\times\mathbb{R} \\ \widehat{L}_2[v] &= -bv + c_2G(v)u + q_2(x) \end{aligned}$$

donde $\widehat{L}_i = \dfrac{\partial}{\partial t} - \nabla\cdot(D_1(x)\nabla)$ $(i=1,2)$, $u(x,t)=u$, $v(x,t)=v$ representan respectivamente la población susceptible y la población infectada, $D_i(x)\equiv D_i$ $(i=1,2)$ son los coeficientes de difusión, $a,b,c,d$ son las constantes de reacción y $q_i$ $(i=1,2)$ son posibles factores externos. La funcional $G(v)$ está definida por

$$G(v)(x,t) = \int_\Omega g(x,s)v(s,t)ds$$

donde $g$ es una función positiva y continua en $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$.
En este caso,

$$F_1(v) = -a - c_1G(v),\quad F_2(v) = c_2G(v),\quad H_i(u) = u\ (i=1,2).$$

Por lo tanto, el caso a) anterior es una generalización del estudiado por el autor en [Q1]. El caso b), sin embargo, no fue considerado en [Q1].

(2) El Teorema de Existencia 5.1 sigue siendo válido si suponemos que $H_1$ es una función que satisface las condiciones de monotonía del Teorema 3.2 y $H_2$ $(i=1,2)$ es un operador de $\mathbb{F}$ en si mismo que satisface las propiedades de monotonía consideradas en la observación siguiente al Lema 4.1.
En este caso la demostración es consecuencia del principio de inducción y del Lema 4.1. En este sentido, el resultado que se obtiene generaliza los resultados obtenidos por el autor en [Q1] y [Q2].

**5.2. Modelo de competencia de especies.** Supongamos que

$$\begin{aligned} f_1(-,-,r,s) &= r\{a - a_1r - a_2s\} \text{ y} \\ f_2(-,-,r,s) &= s\{b - b_1s + b_2r\}, \end{aligned}$$

donde $a,b,a_1,a_2,b_1,b_2$ son números reales positivos. Sean $\lambda_i$ y $\Phi_i$ $(i=1,2)$ los primeros valores propios positivos y las primeras funciones propias positivas de los problemas ($i = 1, 2$).

$$(V.P.P.i) \quad \begin{cases} L_i[\Phi] & = \lambda_i \Phi \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}. \\ \Phi & > 0 \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}. \\ \Phi & \in \mathbb{E}. \end{cases}$$

(véase [La, Teorema 1]).

Sean $b_2$, $R$ y $\tilde{R}$ números reales positivos dados y supongamos que $a > \lambda_1$ y $b > \lambda_2$. Escojamos números positivos $a_1, a_2$, y $b_1$ tales que

$$\begin{aligned} a_1 R &\geq a, \\ a - \lambda_1 &> a_2 \tilde{R}, \\ b_1 \tilde{R} &> b + b_2 R. \end{aligned}$$

Sea $\alpha > 0$ tal que $a - \lambda_1 > a_2 \tilde{R} + \alpha$ y sean $k_1$ y $k_2$ números reales tales que

$$\begin{aligned} a_1 e^{\alpha T_1} k_1 \|\Phi_1\|_\infty^{\overline{\Omega} \times \mathbb{R}} &\leq a - \lambda_1 - \alpha - a_2 \tilde{R}, \\ k_1 \|\Phi_1\|_\infty^{\overline{\Omega} \times \mathbb{R}} &\leq R, \\ k_2 \|\Phi_2\|_\infty^{\overline{\Omega} \times \mathbb{R}} &\leq \tilde{R}, \\ b_1 k_2 \|\Phi_2\|_\infty^{\overline{\Omega} \times \mathbb{R}} &\leq b - \lambda_2. \end{aligned}$$

Sean finalmente

$$\tilde{u}_2 \equiv \tilde{R}, \; \tilde{u}_1 \equiv R, \; u_1 = k_1 e^{-\alpha t} \Phi_1, \; u_2 = k_2 \Phi_2.$$

Es fácil verificar que bajo las condiciones dadas, las parejas $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ y $(u_1, u_2)$ son super y subsoluciones respectivas de $(D)$. Más aún,

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_1 \geq u_1 \geq 0, \; \tilde{u}_2 \geq u_2 \geq 0 \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ &\tilde{u}_i \geq 0, \; u_i \equiv 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

**Teorema 5.3.** *Si $a > \lambda_1$ y $b > \lambda_2$, donde $\lambda_i$ $(i = 1, 2)$ es el primer valor propio positivo del problema parabólico periodico $(V.P.P.i)$, si $b_2 > 0, R > 0$ y $\tilde{R} > 0$ son números reales dados, y si $a_1, a_2$, y $b_1$ son números reales tales que*

$$\begin{aligned} a_1 R &\geq a, \\ a - \lambda_1 &> a_2 \tilde{R}, \\ b_1 \tilde{R} &> b + b_2 R, \end{aligned}$$

*entonces el problema*

$$\begin{cases} L_1[u] = & u(a - a_1 u - a_2 v) \\ & & \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R} \\ L_2[v] = & v(b - b_1 v + b_2 u) \\ u > 0 & v > 0 & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \end{cases}$$

*tiene al menos una solución T-periódica* $(u, v)$, *con* $u, v \in \mathbb{E}$, *tales que* $k_1 e^{-\alpha t}\Phi_1 \leq u \leq R$ *y* $k_2 \Phi_2 \leq v \leq \tilde{R}$ *en* $\Omega \times \mathbb{R}$, *donde* $\Phi_i$ $(i = 1, 2)$ *denota la primera función propia del problema* (*V.P.P.i*).

*Demostración.* Se sigue del Teorema 3.3 y del Lema 4.1.

**Observación.** En este caso es posible escoger las funciones $u_i, \tilde{u}_i$ $(i = 1, 2)$ en el espacio $\mathbb{E}$.

## Referencias


[Ar] V. ARDILA, *Soluciones positivas de un modelo de competencia de especies*, Rev. Colombiana Mat. **27** no. 3–4 (1993), 281–292.

[Fr] A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice Hall, 1964.

[Ko] J.S. KOLESOV, *A test for the existence of periodic solutions to parabolic equations*, Soviet Math. Dokl. **7** no. 5 (1966).

[La] A.C. LAZER, *Some remarks on periodic solutions of parabolic differential equations, Dynamical systems II*, Academic Press, 1980.

[Le] A.W. LEUNG, *Systems of Nonlinear Partial Differential Equations. Applications to Biology and Engineering*, Kluwer, 1989.

[LSU] O.A. LADYZENSKAJA, V.A. SOLONNIKOV & N. URALCEVA, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematics Monographs, American Mathematical Society, Vol. 23, 1968.

[Or] L. ORTEGA, *Soluciones periódicas de un modelo de un reactor dinámico*, Rev. Colombiana Mat. **20** no. 1,2 (1986), 27–37.

[Pa] C.V. PAO, *On nonlinear reaction-diffusion systems*, J. of Math. Analysis and Applications **87** (1982), 165–198.

[Pi] M. PINZÓN, *Soluciones periódicas de un modelo de reactor nuclear dinámico con factor externo*, Lect. Mat. **9** (1988), 101–118.

[Pw] M. PROTTER & H. WEINBERGER, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice Hall, 1982.

[Q1] J. R. QUINTERO, *Soluciones periódicas de un sistema de reacción–difusión correspondiente a un modelo de epidemias*, Lect. Mat. **8** (1987), 59–77.

[Q2] ———, *Un resultado sobre la existencia de soluciones periódicas para un sistema de reacción-difusión generalizado*, Matemat., Enseñanza Univ. **3** no. 2 (1994), 14–29.

[Sm] I. SMULEV, *Periodic Solutions of the First Boundary Problem for Parabolic Equations*, A.M.S. Translations, Vol. 79, 1969.


(Recibido en junio de 1994)


JOSÉ RAÚL QUINTERO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DEL VALLE, CALI, COLOMBIA
Dirección actual: DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF MARYLAND, COLLEGE PARK, MD 20742, USA
*e-mail:* quintero@wam.umd.edu