Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen **29** *(1995), páginas 43–48*

Sur les algèbres de Moufang commutatives

LORENZO ACOSTA

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

A la memoria de Adriana Villalobos

ABSTRACT. The structure of commutative Moufang algebras is studied. We show in particular that the set of idempotent elements is contained in the center of the algebra thus it has a boolean ring structure. Simple and semi-simple commutative Moufang algebras are associative and the associator (x, y, z) is always in the nilradical.

Keywords and phrases. Moufang algebra, alternative algebra, idempotent, nilradical.
1991 Mathematics Subject Classification. Primary 17C. Secondary 17D.

RÉSUMÉ: On poursuit ici le travail commencé dans [2], en étudiant la structure des algèbres de Moufang commutatives. On montre en particulier que l'ensemble des éléments idempotents est contenu dans le centre de l'algèbre ce qui nous permet de lui donner une structure d'anneau de Boole. Ensuite on vérifie que les algèbres de Moufang commutatives de dimension finie ont les propriétés suivantes: elles sont associatives si elles sont semi-simples, et des corps commutatifs si elles sont simples; dans des telles algèbres l'associateur (x, y, z) de trois éléments quelconques est un élément du nilradical.

1. Introduction

On poursuit ici le travail commencé dans [2], en étudiant la structure des algèbres de Moufang commutatives. On montre en particulier que l'ensemble des éléments idempotents est contenu dans le centre de l'algèbre ce qui nous permet de lui donner une structure d'anneau de Boole. Ensuit on vérifie que les algèbres de Moufang commutatives simples et semi–simples sont toujours associatives et que l'associateur (x, y, z) est un élément du nilradical.

Compte tenue de ce que, en caractéristique $\neq 3$, toute algèbre alternative et commutative est associative (cf. [3]), pour justifier une étude des algèbres de Moufang commutatives il faudrait exhiber des algèbres de Moufang commutatives non alternatives. Comme on verra ci–dessous, des telles algèbres existent. Evidemment, la commutativité nous permet de travailler plus à l'aise sur les algèbres de Moufang et l'on obtient des identités tout–à–fait intéressantes. On vérifie que, en dimension finie, les algèbres de Moufang commutatives simples sont des corps commutatifs et les algèbres de Moufang commutatives semi–simples sont toujours associatives, même en caractéristique 3. En outre, on montre que l'ensemble des idempotents d'une algèbre de Moufang commutative possède une structure d'anneau de Boole (associatif!).

Rappelons que l'on désigne par (x, y, z) l'associateur $(xy)z - x(yz)$ et par L_x et R_x les opérateurs linéaires de multiplication à gauche et à droite respectivement.

1.1 Définition. *Une algèbre de Moufang commutative est une algèbre qui satisfait les identités suivantes:*

(C_0) $xy = yx$
(C_1) $(xzx)y = x(z(xy))$
(C_2) $(xy)(zx) = x(yz)x.$

1.2 Exemple. Soit A l'algèbre de base e_1, e_2, e_3, e_4, dont la table de multiplication est la suivante:

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_3	e_3	e_4	0
e_2	e_3	e_4	0	0
e_3	e_4	0	0	0
e_4	0	0	0	0

Evidemment, A est nilpotente d'ordre 4 et par conséquent est trivialement de Moufang. Cependant, A n'est pas alternative car $(e_1)^2\, e_2 \neq e_1(e_1\, e_2)$. On a donc des algèbres de Moufang commutatives non alternatives.

1.3 Lemme. *Soit e un idempotent dans une algèbre de Moufang commutative. Alors, R_e et L_e sont des opérateurs linéaires idempotents qui commutent.*

En effet, comme l'algèbre est commutative R_e et L_e commutent. De plus, on a $(x,e,e)+(e,e,x)=0$, et, en multipliant à droite par e et en utilisant les identités (C_1) et (C_2) on obtient

$$0=(x,e,e)e+(e,e,x)e=((xe)e)e-(xe)e+exe-e(ex)e=xe-(xe)e,$$

et ainsi $(R_e)^2=R_e$. De même, si l'on multiplie à gauche au lieu de multiplier à droite, on montre que $(L_e)^2=L_e$.

La proposition suivante découle immédiatement des identités (C_0), (C_1) et (C_2):

1.4 Proposition. *Dans toute algèbre de Moufang commutative, les identités suivantes sont vérifiées:*

(C_3) $(xyx)x=x(yx^2)=(xy)x^2=x(yx)x=((yx)x)x=yx^3$.
(C_4) $(xy)^2=(xy)(yx)=xy^2x=yx^2y$.
(C_5) $(xy)^3=x^3y^3$.
(C_6) $(x^3,y,z)=(x,y^3,z)=(x,y,z^3)=0$.

1.5 Lemme. *Dans une algèbre de Moufang commutative les identités suivantes sont vérifiées pour $i=1,\ 2$ et $m\geq 3$:*

(*i*) $x^i(x^my)=x^{m+i}y$,
(*ii*) $x^m(x^iy)=x^{m+i}y$.

En effet, si m est un multiple de 3, l'assertion (*i*) découle de (C_6). Supposons maintenant que $m=3p+j$ où $j=1$ ou $j=2$. Ainsi

$$x^i(x^my)=x^i((x^3px^j)y)=x^i(x^{3p}(x^jy)).$$

Donc, si $i=j$ on a $x^i(x^my)=(x^ix^{3p}x^j)y=x^{m+i}y$ et si $i\neq j$ on a $x^i(x^my)=x^{3p}(x^i(x^jy))=x^{3p}(x^3y)=x^{m+i}y$. De même on vérifie (*ii*).

1.6 Proposition. *Dans une algèbre de Moufang commutative, l'identité suivante est vérifiée:*

(C_7) $x^n(x^my)=x^{n+m}y,\quad$ *si* $(n,m)\neq(1,1),(2,2)$.

1.7 Corollaire. *Pour tout x dans une algèbre de Moufang commutative et pour tout $n\neq 2$, on a $L_{x^n}=(L_x)^n$ et $R_{x^n}=(R_x)^n$.*

Notons que les algèbres alternatives se caractérisent précisément par les identités $L_{x^2}=(L_x)^2$ et $R_{x^2}=(R_x)^2$.

2. Idempotents

On va montrer ici que l'ensemble des idempotents d'une algèbre de Moufang commutative possède une structure d'anneau de Boole. Ceci va nous permettre de conclure que, si l'algèbre contient un idempotent principal, il est unique et, par conséquent, la décomposition de Peirce est, elle aussi, unique.

2.1 Proposition. *Soient e, f, g des idempotents d'une algèbre de Moufang commutative. Alors:*

(*i*) $(ef)^2 = ef$,

(*ii*) $(e, f, g) = 0$.

En effet, d'après $(C_4), (ef)^2 = ef^2e = efe = e(ef)$. Mais L_e est un opérateur idempotent et ainsi $(ef)^2 = ef$. Pour montrer (*ii*), il suffit de remarquer que $e = e^3$ et d'appliquer l'identité (C_6).

2.2 Corollaire. *L'ensemble des idempotents d'une algèbre de Moufang commutative possède une structure d'anneau de Boole.*

Ceci découle du fait que x^3 est dans le centre de l'algèbre quel que soit x, et ainsi l'ensemble des idempotents est contenu dans le centre. Rappelons ici que le centre d'une algèbre non associative est l'ensemble des éléments x satisfaisant $[x, y] = (x, y, z) = (y, x, z) = (y, z, x) = 0$ quels que soient y et z dans l'algèbre. Comme le centre est toujours une algèbre associative et commutative, l'ensemble de ses idempotents, muni de l'addition définie par $e \tilde{+} f = e + f - 2ef$ et du produit original de l'algèbre, possède une structure d'anneau de Boole (cf. [5]).

2.3 Corollaire. *Si l'algèbre de Moufang commutative admet un idempotent principal, celui–ci est unique.*

Soient e et f deux idempotents principaux dans A. Notons $g = e \tilde{+} f \tilde{+} ef$. Ainsi g est un idempotent de A tel que $eg = e$ et $fg = f$. De plus,

$$(g \tilde{+} e)e = ge \tilde{+} e = e \tilde{+} e = 0$$

d'où $g \tilde{+} e = 0$ et par conséquent $g = e$. De même, on a $g = f$ et alors il n'existe qu'un seul idempotent principal dans A.

2.4 Corollaire. *L'algèbre de Moufang commutative A admet un idempotent principal si et seulement si l'anneau de Boole de ses éléments idempotents possède un élément unité.*

2.5 Corollaire. *Si A est une algèbre de Moufang commutative de dimension finie, l'ensemble des idempotents de A est fini.*

Il suffit de remarquer que tout anneau de Boole infini contient un ensemble infini d'éléments deux–à–deux orthogonaux et tout ensemble d'idempotents deux–à–deux orthogonaux est linéairement indépendant.

3. Algèbres simples et semi–simples

Dans ce paragraphe on va montrer que, en dimension finie, toute algèbre de Moufang commutative simple est un corps et toute algèbre de Moufang commutative semi–simple est associative. Par conséquent, dans toute algèbre de Moufang commutative de dimension finie l'associateur (x, y, z) est nilpotent. Ceci généralise le resultat suivant pour les algèbres alternatives: "Dans une algèbre alternative et commutative on a $(x, y, z)^2 = 0$ quels que soient x, y et z" (cf. [10]).

3.1 Proposition. *Toute algèbre de Moufang commutative semi–simple de dimension finie est associative.*

Toute algèbre de Moufang commutative semi–simple de dimension finie est alternative (cf. [1], [2]), donc, en caractéristique $\neq 3$ elle est associative. Montrons que, en caractéristique 3, on a le même résultat. Notons d'abord que si A est une algèbre alternative et commutative sur un corps de caractéristique 3 alors $(x-y)^3 = x^3 - y^3$ pour tout $x, y \in A$. En utilisant ceci et (C_5) et (C_6) on a $(x, y, z)^3 = (x^3, y^3, z^3) = 0$. Donc, (x, y, z) appartient au nilradical de A et comme A est semi–simple on a $(x, y, z) = 0$ et ainsi A est associative.

3.2 Corollaire. *Dans toute algèbre de Moufang commutative de dimension finie, l'associateur (x, y, z) est un élément du nilradical.*

En effet, soient N le nilradical de A et $\theta : A \to A/N$ l'homomorphisme canonique; A/N est associative, car elle est semi–simple, donc $\theta(x, y, z) = 0$. Ceci équivaut à $(x, y, z) \in N$.

3.3 Proposition. *Toute algèbre de Moufang commutative simple de dimension finie est un corps commutatif.*

Notons que toute algèbre de Moufang commutative simple de dimension finie est associative (car elle est semi–simple). Par conséquent, d'après le corollaire 3.11. de [8], elle est un corps commutatif (cf. Théorème 7.1.3. [10]).

3.4 Proposition. *Il existe une bijection entre l'ensemble des idempotents d'une algèbre de Moufang commutative semi–simple de dimension finie et l'ensemble de ses idéaux. Par conséquent, le nombre d'idéaux d'une telle algèbre est une puissance de 2 (cf. [4]).*

Bibliographie

[1]. L. Acosta, *Sur les algèbres de Moufang*, Thèse de Doctorat (1992), Montpellier.

[2]. L. Acosta, J.C. Da Motta-Ferreira, L.A. De Capua, A. Micali, *Sur les algèbres de Moufang*, Journal de Mathématiques du Maroc, no. 1 (1993), 23–34.

[3]. L. A. Capua & A. Micali, *Sur les algèbres alternatives*, Cahiers Mathématiques, Montpellier **39** (1992), 348–370.

[4]. L. A. CAPUA, A. KOULIBALY ET A. MICALI, *Autour des algèbres de Malcev*, Rivista di Matematica pura ed applicata **8** (1991), 29–40.
[5]. P. HALMOS, *Lectures on Boolean Algebras,*, Springer, Berlin, 1974.
[6]. K. MC CRIMMON, *Finite-dimensional Left Moufang Algebras*, Math. Ann. **224** (1976), 179–187.
[7]. M. OUATTARA, Cahiers Mathématiques, Montpellier **37** (1988).
[8]. R. D. SCHAFER, *An introduction to non associative algebras*, Academic Press, New York, 1966.
[9]. A. THEDY, *Right alternative algebras*, J. Algebra **37** (1975), 1–43.
[10]. K. A. ZHEVLAKOV, A. M. SLIN'KO, I. P. SHESTAKOV AND A. I. SHIRSHOV, *Rings that are nearly associative*, Academic Press, New York, 1982.

(Recibido en noviembre de 1994)

LORENZO ACOSTA GEMPELER
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BOGOTÁ, COLOMBIA
e-mail: loacosta@ciencias.campus.unal.edu.co