FUNDAMENTACION AXIOMATICA DE LA GONIOMETRIA

Por

MANUEL VINENT
(Departamento de Matemáticas U.N.)

El presente trabajo es la consecuencia de una sugerencia de mi maestro y amigo, el Profesor Carlo Federici, a propósito de la posibilidad de fundamentar mediante un conjunto de axiomas la Goniometría.

Esto no tiene nada de particular. Es apenas una prueba más, trivial, de las inagotables posibilidades del punto de vista formal en Matemática.

Puede tener un valor didáctico: Creo que así debería presentarse la Goniometría en el primer año de Universidad.

CONJUNTO DE AXIOMAS

Las proposiciones acompañadas de la letra A son axiomas.
Las que van acompañadas de la letra D son definiciones. Las demás son proposiciones demostrables.

1-A Seno es una función

Se trata pues de una relación unívoca. A cada elemento del Dominio le corresponde un y un solo elemento del Codominio.

2-A El Dominio de seno (sn.) es el Conjunto de los números Reales.

3-A El Codominio de sn. es el intervalo $[-1,1]$

4-A $\mathrm{sn}\ 0 = 0$

5-A $\mathrm{sn}\ \pi/2 = 1$

6-A $0 < a < \pi/2$ implica $1 < \dfrac{a}{\mathrm{sn}\ a} < \sqrt{a^2 + 1}$

Esta proposición nos permite demostrar la derivabilidad de la función seno y su positividad en el primer cuadrante.

7-A $\mathrm{Sn}\,(-a) = -\mathrm{sn}\ a$

Es decir, seno es una función impar.

8-A $\mathrm{sn}\,(a+b) = \mathrm{sn}\ a.\mathrm{sn}\ (\pi/2 - b) + \mathrm{sen}\ (\pi/2 - a).\ \mathrm{sn}\ b$

DEFINICION DE LA FUNCION COSENO (cs) Y PROPIEDADES RELATIVAS A LAS FUNCIONES SENO Y COSENO.

9-D $\mathrm{cs}\ a = \mathrm{sn}\ (\pi/2 - a)$

10 cs es una función

Evidente de la definición

11 El Dominio de cs es el Conjunto de los Número Reales;

12 El Codominio de cs es el intervalo $[-1, 1]$

(11) y (12) son igualmente consecuencias inmediatas de la definición.

13 $\mathrm{cs}\ 0 = 1$

En efecto:

$\mathrm{cs}\ 0 = \mathrm{sn}\ (\pi/2 - 0) = \mathrm{sn}\ \pi/2 = 1$

14 $\mathrm{cs}\ \pi/2 = 0$

En efecto:

$\mathrm{cs}\ \pi/2 = \mathrm{sn}\ (\pi/2 - \pi/2) = \mathrm{sn}\ 0 = 0$

15 $\mathrm{cs}\ (-a) = \mathrm{cs}\ a$

Es decir que cs es una función par; En efecto de -(8-A);

$\mathrm{cs}\ (-a) = \mathrm{sn}\ (\pi/2 - (-a)) = \mathrm{sn}\ (\pi/2 + a) =$

$\mathrm{sn}\frac{\pi}{2}\cdot \mathrm{sn}(\pi/2 - a) + \mathrm{sn}(\pi/2 - \pi/2).\ \mathrm{sn}\ a = 1\cdot \mathrm{cs}\ a + 0\cdot \mathrm{sn}\ a = \mathrm{cs}\ a$

16 $0 \leq a \leq \pi/2$, implica, $0 \leq \mathrm{sn}\ a$

Es decir que sn es positivo en el primer cuadrante. Esta proposición es consecuencia inmediata de los axiomas (4-A), (5-A) y (6-A).

17 $0 < a < \pi/2$, implica $\mathrm{sn}\ a < a$

Inmediato de (6-A)

18 $0 < a < \pi/2$, implica,

Immediato de (9-D)

19 $\operatorname{sn}(a+b)=\operatorname{sn} a \operatorname{cs} b+\operatorname{cs} a \operatorname{sn} b$

De (8-A9 y (9-D)

20 $\operatorname{cs}(a+b)=\operatorname{cs} a \operatorname{cs} b-\operatorname{sn} a \operatorname{sn} b$

En efecto de (7-A) y (9-D):

$$\operatorname{cs}(a+b)=\operatorname{sn}(\pi/2-(a+b))=\operatorname{sn}((\pi/2-a)+(-b))$$
$$=\operatorname{sn}(\pi/2-a)\operatorname{cs}(-b)+\operatorname{cs}(\pi/2-a)\operatorname{sn}(-b)$$
$$=\operatorname{cs} a \operatorname{cs} b+\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(-b)=\operatorname{cs} a \operatorname{cs} b-\operatorname{sn} a \operatorname{sn} b$$

21 $\operatorname{sn}(a-b)=\operatorname{sn} a \operatorname{cs} b-\operatorname{cs} a \operatorname{sn} b$

En efecto, de (7-A), (15) y (19):

$$\operatorname{sn}(a-b)=\operatorname{sn}(a+(-b))=\operatorname{cs} a \operatorname{sn}(-b)+\operatorname{sn} a \operatorname{cs}(-b)$$
$$=\operatorname{sn} a \operatorname{cs} b-\operatorname{cs} a \operatorname{sn} b$$

22 $\operatorname{cs}(a-b)=\operatorname{cs} a \operatorname{cs} b+\operatorname{sn} a \operatorname{sn} b$

Analógamente de (7-A), (15) y (20)

23 $\operatorname{sn}^2 a+\operatorname{cs}^2 a=1$

En efecto:

$$1=\operatorname{sn} \pi/2=\operatorname{sn}(\pi/2+(a-a))=\operatorname{sn}(a+(\pi/2-a))$$
$$=\operatorname{sn} a \operatorname{cs}(\pi/2-a)+\operatorname{cs} a \operatorname{sn}(\pi/2-a)=\operatorname{sn}^2 a+\operatorname{cs}^2 a$$

A partir de estas proposiciones, se deducen facilmente las conocidas con los nombres de ángulo doble, ángulo mitad, del factor y del producto. Sin dar su demostración, que puede encontrarse en cualquier tratado usual de Trigonometría, mencionaremos las siguientes que necesitamos utilizar posteriormente.

24 $\operatorname{sn} 2a=2\operatorname{sn} a \operatorname{cs} a$

25 $\operatorname{sn} a-\operatorname{sn} b=2 \operatorname{sn} \frac{a-b}{2} \operatorname{cs} \frac{a+b}{2}$

26 $\operatorname{sn} a+\operatorname{sn} b=2 \operatorname{sn} \frac{a+b}{2} \operatorname{cs} \frac{a-b}{2}$

27 $\operatorname{cs} a+\operatorname{cs} b=2 \operatorname{cs} \frac{a+b}{2} \operatorname{cs} \frac{a-b}{2}$

28 $\operatorname{sn} \pi=0$

En efecto:(24)

$$\operatorname{sn} \pi=\operatorname{sn}(\pi/2+\pi/2)=2\operatorname{sn} \pi/2 \cdot \cos \pi/2=0$$

29 $\cos \pi = -1$

En efecto:

$\text{cs } \pi = \text{sn } (\pi/2 - \pi) = \text{sn } (-\pi/2) = -\text{sn } \pi/2 = -1$

30 $\text{sn } 3\pi/2 = -1$

En efecto:

$\text{sn } 3\pi/2 = \text{cs } (\pi/2 - 3\pi/2) = \text{cs}(\pi) = \text{cs } \pi = -1$

31 $\text{cs } 3\pi/2 = 0$

En efecto:

$\text{cs } 3\pi/2 = \text{sn}(\pi/2 - 3\pi/2) = \text{sn}(-\pi) = \text{sn}\pi = 0$

32 $\text{sn } 2\pi = 0$

En efecto:

$\text{sn } 2\pi = \text{cs } (\pi/2-2\pi) = \text{cs } (-3\pi/2) = \text{cs } 3\pi/2 = 0$

33 $\text{cs } 2\pi = 1$

Análogamente:

$\text{cs } 2\pi = \text{sn } (\pi/2 - 2\pi) = \text{sn } (-3\pi/2) = -\text{sn } 3\pi/2 = -(-1) = 1$

34 $\text{sn } 2\pi n = 0$, (n Entero).

Lo demostraremos por inducción.

La proposición es cierta para $n=1$

Supongámosla cierta para n positivo. Entonces,

$\text{sn}(2\pi(n+1)) = \text{sn } (2\pi n + 2\pi) =$

$= \text{sn}(2\pi n).\text{cs}(2\pi) + \text{cs}(2\pi n).\text{sn}(2\pi) = \text{sn}(2\pi n).\ 1 = 0$

Si n es negativo, es decir que $n = -p$ donde p es positivo, tendremos,

$\text{sn}(-2\pi p) = -\text{sn } (2\pi p) = 0$

35 $\text{cs } (2\pi n) = 1$, (n Entero)

Demostración análoga a la anterior.

36 $\text{sn } a = \text{sn } (a+2\pi n)$, (n Entero)

Esta proposición establece la periodicidad de la función seno.

Podemos demostrarla del siguiente modo:

$\text{sn}(a+2\pi n) = \text{sn } a.\ \text{cs } 2\pi n + \text{cs} a \cdot \text{sn } 2\pi n = \text{sn } a$

Análogamente se demuestra la periodicidad del coseno.

37 $\text{cs } a = \text{cs } (a+2\pi n)$, (n Entero)

38 Seno es una función monótona creciente en el intervalo $[0,\pi/2]$.

Esta proposición significa que si $0 \leq a \leq \pi/2$ y $0 \leq b \leq \pi/2$ y $a < b$, se cumple que $\mathrm{sn}\ a < \mathrm{sn}\ b$, o lo que es lo mismo; $\mathrm{sn}\ a < \mathrm{sn}\ (a+c)$, donde, $0<c = b-a$

El gráfico adjunto ilustra esta situación.

Entonces, $\mathrm{sn}(a+c) - \mathrm{sn}\ a = 2\mathrm{sn}\ \dfrac{(a+c)-a}{2} . \mathrm{cs}\ \dfrac{(a+c)+a}{2} =$

$2\mathrm{sn}\ \dfrac{c}{2} . \mathrm{cs}\ (a + \dfrac{c}{2}) > 0$ (de (16) y (18) y (26))

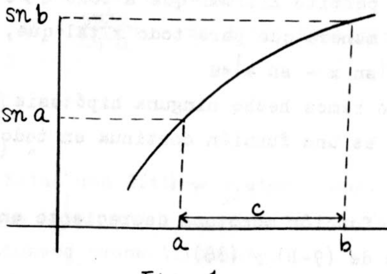

Fig. 1

39 Seno es una función cóncava en el intervalo $[0; \pi/2]$

Se puede tomar como definición de concavidad la condición, $f(\frac{b+a}{2}) - \frac{f(a) + f(b)}{2} > 0$, como nos lo muestra el gráfico.

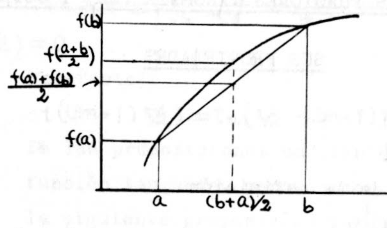

Fig. 2.

Bastará demostrar pués que,

$\mathrm{sn}\ (\dfrac{a+b}{2}) - \dfrac{1}{2}\ (\mathrm{sn}\ a + \mathrm{sn}\ b) > 0$, si,

$0 \leq a < \pi/2$ y $0 \leq b<\pi/2$ y $a \neq b$.

En efecto,

$\mathrm{sn}\ (\frac{a+b}{2}) - \frac{1}{2}\ (\mathrm{sn}\ a + \mathrm{sn}\ b) = \mathrm{sn}(\frac{a+b}{2}) - \mathrm{sn}\ (\frac{a+b}{2}).\ \mathrm{cs}(\frac{a-b}{2}) =$

$\mathrm{sn}\ (\frac{a+b}{2}) . (1 - \mathrm{cs}\ (\frac{a-b}{2})) > 0$

40 Seno es una función continua.

Recordemos la condición de continuidad en un punto:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Tenemos que:

$|\text{sn } x - \text{sn } a| = |2\text{sn}\frac{x-a}{2} . \text{cs } \frac{x+a}{2}| < 2|\text{ sn}\frac{x-a}{2}| < 2|\frac{x-a}{2}| < |x-a|$

Esto nos permite afirmar que a todo $\varepsilon > 0$ le corresponde un - $\delta = \varepsilon$ de manera que para todo x tal que, $0 < |x-a| < \delta$ se cumple que $|\text{sn } x - \text{sn } a| < \varepsilon$

Y como no hemos hecho ninguna hipótesis sobre a, resulta - que seno es una función continua en todo su intervalo de de̲finición

41 Coseno es una función monótona decreciente en el intervalo $[0, \pi/2]$

Evidente de (9-D) y (38)

42 Coseno es una función cóncava en el intervalo $[0, \pi/2]$

Evidente también de (9-D) y (39)

43 Coseno es una función contínua

De (9-D) y (40)

DEFINICIONES DE LAS FUNCIONES TANGENTE (tn) Y COTANGENTE (ct) Y SUS PROPIEDADES

44-D $\text{tn } a = \frac{\text{sna}}{\text{csa}}$

45 tn es una función

Inmediato de la definición

46-D $\text{cta} = \text{tn } (\pi/2 - a)$

47 ct es una función.

48 $\text{cta} = \frac{\text{csa}}{\text{sna}}$

Evidente de (9-D)

49 tn 0 = 0. Puesto que sn 0 = 0 y cs o = 1

50 $\text{ct}\pi/2 = 0$. Puesto que $\text{cs } \pi/2 = 0$ y $\text{sn } \pi/2 = 1$

51 $0 \leq a \leq \pi/2$, implica, $0 \leq \text{tn } a$

52 $0 < a \leq \pi/2$, implica, $0 \leq \text{ct } a$

Ambas se deducen de (16) y (18).

53 $0 < a < \pi/2$. Implica, $a < tn\, a$

En efecto,

De (6-A) se deduce que,

$a < \sqrt{a^2+1} \cdot sen\, a$, de donde,

$a^2 < (a^2+1) \cdot sen^2 a$, y

$a^2 < a^2 \cdot sen^2 a + sen^2 a$

$a^2(1 - sn^2 a) < sn^2 a$

$a^2\, cs^2 a < sn^2 a$

$a^2 < \dfrac{sn^2 a}{cs^2 a}$ de donde finalmente, $a < tn\, a$

54 $tn\, a = -tn(-a)$

55 $ct\, a = -ct(-a)$

Estas dos últimas proposiciones se deducen de la imparidad y paridad de las funciones seno y coseno respectivamente.

56 $tn\, \pi = 0$

En efecto,

$$tn\, \pi = ct(\pi/2 - \pi) = ct(-\pi/2) = -ct\, \pi/2 = 0$$

57 $tn\, n\pi = 0$

En efecto,

$$tn\, n\pi = \frac{sn\, n\pi}{cs\, n\pi} = \frac{0}{\pm 1} = 0$$

58 $ct((2n+1)\pi/2) = 0$

En efecto:

$$ct((2n+1)\pi/2) = tn(\pi/2 - (2n+1)\pi/2) = tn(-n\pi) = 0$$

De las proposiciones corrientes relativas a la función tangente, mencionamos, sin demostrarla, la siguiente proposición que necesitamos.

59 $tn(a+b) = \dfrac{tn\, a + tn\, b}{1 - tn\, a\, tn\, b}$

60 $tn\, a = tn(a + n\pi)$

En efecto, de (58)

$$tn(a+n\pi) = \frac{tn\, a + tn\, n\pi}{1 - tn\, a\, tn\, n\pi} = \frac{tn\, a + 0}{1 + 0} = tn\, a$$

61 $\operatorname{ct} a = \operatorname{ct}(a+n\pi)$

En efecto:

$$\operatorname{ct}(a+n\pi) = \frac{1}{\operatorname{tn}(a+n\pi)} = \frac{1}{\operatorname{tn} a} = \operatorname{ct} a$$

62 $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sn} x}{x} = 1$

Este límite es fundamental en Análisis.

De (6–A) se deduce:

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sn} x} = 1$ lo que implica en forma inmediata que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sn} x}{x} = 1$$

63 $\lim_{x\to 0+} \operatorname{ct} x = +\infty$

En efecto,

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{ct} x = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\operatorname{tn} x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$

64 $\lim_{x\to\pi/2} \operatorname{tn} x = +\infty$

En efecto,

$$\lim_{x\to\pi/2-} \operatorname{ct}(\pi/2 - x) = \lim_{u\to 0+} \operatorname{ct} u = +\infty$$

65 $\lim_{x\to 0-} \operatorname{ct} x = -\infty$

66 $\lim_{x\to\pi/2+} \operatorname{tn} x = -\infty$

Estas dos últimas proposiciones se deducen de la imparidad de las funciones tangente y cotangente. Con estos datos, y teniendo en cuenta además la periodicidad de estas funciones es posible deducir su gráfica.

67 Tangente es una función monótona creciente en el intervalo $[0,\pi/2)$.

Bastará demostrar, como hicimos en el caso del seno, que si $0 \leq a < \pi/2$, y, $0 \leq b < \pi/2$, y, $a < b$, se verifica que $\operatorname{tn} a < \operatorname{tn} b$, o, si $c = b-a$, que

$\operatorname{tn} a < \operatorname{tn}(a+c)$.

En efecto:

$$\operatorname{tn}(a+c) - \operatorname{tn} a = \frac{\operatorname{tn} a + \operatorname{tn} c}{1-\operatorname{tn} a . \operatorname{tn} c} - \operatorname{tn} a =$$

$$\frac{\operatorname{tn} a+\operatorname{tn} c-(1-\operatorname{tn} a.\operatorname{tn} c)\operatorname{tn} a}{1 - \operatorname{tn} a.\ \operatorname{tn} c} = \frac{\operatorname{tn} a(1-(1-\operatorname{tn} a \cdot \operatorname{tn} c)) + \operatorname{tn} c}{1 + \operatorname{tn} a.\ \operatorname{tn} c}$$

$$= \frac{\operatorname{tn} c\ (\operatorname{tn} a + 1)}{1 - \operatorname{tn} a.\ \operatorname{tn} c} > 0$$

(Téngase en cuenta que $\operatorname{tn}(a+c) > 0$ implica, $1 - \operatorname{tn} a.\ \operatorname{tn} c > 0$)

68 tangente es una función convexa en el intervalo $[0, \pi/2)$

Demostración. Esta proposición equivale a la condición siguiente:

$0 \leq a < \pi/2$, y, $0 \leq b < \pi/2$, y $a \neq b$

$$\frac{1}{2}(\operatorname{tn} a + \operatorname{tn} b) - \operatorname{tn}\frac{a+b}{2} > 0$$

En efecto:

$$\frac{1}{2}(\operatorname{tn} a+\operatorname{tn} b) - \operatorname{tn}\frac{a+b}{2} = \frac{\operatorname{sn} a}{2 \operatorname{cs} a} + \frac{\operatorname{sn} b}{2 \operatorname{cs} b} - \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\operatorname{cs}\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

$$= \frac{\operatorname{sn} a}{2 \operatorname{cs} a} + \frac{\operatorname{sn} b}{2 \operatorname{cs} b} - \frac{2 \operatorname{sn}\left(\frac{a+b}{2}\right) \operatorname{cs}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2 \operatorname{cs}\left(\frac{a+b}{2}\right) \operatorname{cs}\left(\frac{a-b}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sn} a}{2 \operatorname{cs} a} + \frac{\operatorname{sn} b}{2 \operatorname{cs} b} - \frac{\operatorname{sn} a + \operatorname{sn} b}{\operatorname{cs} a + \operatorname{cs} b} =$$

$$= \frac{\operatorname{sn} a}{2 \operatorname{cs} a} - \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{cs} a + \operatorname{cs} b} + \frac{\operatorname{sn} b}{2 \operatorname{cs} b} - \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{cs} a + \operatorname{cs} b} =$$

$$= \frac{\operatorname{sn} a.(\operatorname{cs} a + \operatorname{cs} b) - 2 \operatorname{sn} a.\ \operatorname{cs} a}{2 \operatorname{cs} a\ (\operatorname{cs} a + \operatorname{cs} b)} + \frac{\operatorname{sn} b.(\operatorname{cs} a+\operatorname{cs} b)-2 \operatorname{sn} b.\operatorname{cs} b}{2 \operatorname{cs} b\ (\operatorname{cs} a + \operatorname{cs} b)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sn} a.\operatorname{cs} b.(\operatorname{cs} a+\operatorname{cs} b)-2 \operatorname{sn} a.\operatorname{cs} a.\operatorname{cs} b+\operatorname{sn} b \operatorname{cs} a(\operatorname{cs} a+\operatorname{cs} b)-2\operatorname{sn} b \operatorname{cs} a}{2 \operatorname{cs} a \operatorname{cs} b\ (\operatorname{cs} a + \operatorname{cs} b)}$$

$$= \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cs} b(\operatorname{cs} a+\operatorname{cs} b - 2 \operatorname{cs} a)+\operatorname{sn} b \operatorname{cs} a(\operatorname{cs} a+\operatorname{cs} b- 2 \operatorname{cs} b)}{2 \operatorname{cs} a.\ \operatorname{cs} b(\operatorname{cs} a + \operatorname{cs} b)}$$

$$= \frac{(\operatorname{cs} b - \operatorname{cs} a) \operatorname{sn} a \operatorname{cs} b + (\operatorname{cs} a- \operatorname{cs} b) \operatorname{sn} b \operatorname{cs} a}{2 \operatorname{cs} a.\ \operatorname{cs} b(\operatorname{cs} a + \operatorname{cs} b)} =$$

$$= \frac{(\operatorname{cs} a-\operatorname{cs} b).(\operatorname{sn} b \operatorname{cs} a-\operatorname{sn} a \operatorname{cs} b)}{2 \operatorname{cs} a.\ \operatorname{cs} b(\operatorname{cs} a + \operatorname{cs} b)} = \frac{(\operatorname{cs} a-\operatorname{cs} b).\ \operatorname{sn}(b-a)}{2 \operatorname{cs} a.\ \operatorname{cs} b.(\operatorname{cs} a +\operatorname{cs} b)} > 0$$

69 tangente es una función contínua, excepto en los puntos $x=(2n+1)\pi/2$

En efecto, $\lim_{x\to a} \operatorname{tn} x = \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{cs} x} = \lim_{x\to a} \operatorname{sn} x / \lim_{x\to a} \operatorname{cs} x = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{cs} a} = \operatorname{tn} a$

$(a \neq (2n+1).\pi/2)$

70 cotangente es una función monótona decreciente en el intervalo $(0, \pi/2]$

Inmediato de (46-D) y (67)

71 cotangente es una función convexa en el intervalo $(0,\pi/2]$

Se demuestra de una manera análoga que (67)

72 cotangente es una función contínua, excepto en los puntos $x = n\pi$.

Inmediado de (69) y (46-D)

73 El Dominio de la Función tangente es la clase de los Reales diferentes de $(2n+1).\pi/2$

Puesto que $\operatorname{cs}\ (2n+1).\pi/2 = 0$

74 El Codominio de la función tangente es la clase de los reales.

De (49),(64) y (66) y (69)

75 El Dominio de la función cotangente es la clase de los Reales diferentes de $n.\pi$

Puesto que $\operatorname{sn}(n\pi) = 0$

76 El Codominio de la función cotangente es la clase de los Reales.

De (50), (63), (65) y (72)

(Recibido en el mes de Enero de 1965)