TRANSFERENCIA DE CALOR A LECHOS EMPACADOS

Por

MIGUEL CANCELADO ARIAS
(Departamento de Matemáticas U.N.)
ALVARO BELTRAN FEGED
(Departamento de Química U.N.)
ALBERTO BONILLA MELENDEZ
(Departamento de Química U.N.)

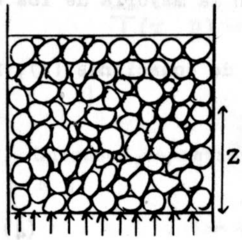

Fig. 1

Consideremos el lecho de sólidos granulados de la figura 1.

El lecho está a una temperatura u (z,t), y tiene un calor específico c_s, que se toma constante. z es la altura del lecho, y t es el tiempo. A este lecho entran G unidades de masa de fluido por unidad de tiempo y de área de sección de lecho.[1],[2]

En cualquier momento el gas tiene una temperatura T (z,t) y un calor específico c_g.

Aplicando un balance de energía al sólido y al fluido, obtenemos las ecuaciones siguientes:[2]

$$-G \cdot c_g \frac{\partial T}{\partial z} - a \cdot U (T - W) = H \cdot c_g \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (1)$$

$$a \cdot U (T - W) = H \cdot c_s \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (2)$$

Donde,

U = Coeficiente de transferencia de calor del fluido al sólido.

a = area de transferencia de calor;

H = Cantidad de sólido que cabe en la unidad de volumen de torre.

W = Temperatura de equilibrio entre el fluido y el sólido definido por la ecuación

W = u + b

siendo b una constante. (3)

La relación entre W y u no siempre es lineal, pero en este artículo la tomamos así por simplificación, cosa que además podemos aceptar ya que conduce a resultados que son en la mayoría de los casos confirmados por la práctica.

Ahora, el objetivo es resolver el sistema de ecuaciones (1),(2) y (3), por medio de los cambios de variable.

$$x = \frac{aU}{G \cdot c_g} z \qquad (4)$$

$$y = \frac{aU}{H\, c_s} t \qquad (5)$$

x, representa la altura de la torre en términos del número de unidades de transferencia de calor, en tanto que y expresa la unidad de volumen de la torre.

Entonces las ecuaciones (1), (2) y (3) se convierten en:

$$-\frac{\partial T}{\partial x} = T - W \qquad (6)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = T - W \qquad (7)$$

El sistema está sometido a las siguientes condiciones:

Condición Inicial.

para t = 0 (y = 0), W = Wo para todo x. (8)

Condición de Frontera.

para z = 0 (x = 0), T = To para todo y. (9)

Aplicando transformación de Laplace para la variable y, sean:

$$\left.\begin{aligned} \overline{W}(x,p) &= \int_0^\infty e^{-py} W(x,y)\,dy \\ \overline{T}(x,p) &= \int_0^\infty e^{-py} T(x,y)\,dy \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Entonces se obtiene:

$$-\frac{\partial \overline{T}}{\partial x} = \overline{T} - \overline{W} \qquad (6\text{-a})$$

$$p\overline{W} - W_0 = \overline{T} - \overline{W} \qquad (7\text{-a})$$

Eliminado $\overline{W}$ se obtiene

$$-\frac{d\overline{T}}{dx} = \frac{p}{p+1}\left(\overline{T} - \frac{W_0}{p}\right) \qquad (11)$$

En donde p se considera como un parámetro.

Integrando (11)

$$\overline{T} = -\frac{W_0}{p} + A\,e^{-\frac{p}{p+1}x} \qquad (12)$$

siendo A la constante de integración

Pata determinar la constante de integración, usamos la condición de frontera (9), y transformación (10).

Entonces,

$$A = \frac{T_0 - W_0}{p} \qquad (13)$$

De (12) y (13)

$$\overline{T} = -\frac{W_0}{p} + \frac{T_0 - W_0}{p} e^{-\frac{p}{p+1}x} \tag{14}$$

De (7-a)

$$\overline{W} = \frac{W_0}{p} + \frac{T_0 - W_0}{p} e^{-x} \left[\frac{e^{\frac{x}{p+1}}}{p+1} \right] \tag{15}$$

Aplicando la transformación inversa, $\mathcal{L}^{-1}$ se tiene.

$$W = W_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} + (T_0 - W_0) e^{-x} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{e^{\frac{x}{p+1}}}{p+1} \right\}$$

Donde $*$ indica la convolución.

Usando una tabla de transformaciones de Laplace,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{e^{\frac{x}{p+1}}}{p+1} \right\} = e^{-y} J_0 (2 i \sqrt{xy}) = e^{-y} I_0 (2 \sqrt{xy})$$

Entonces

$$W = W_0 + (T_0 - W_0) e^{-x} \int_0^y e^{-s} J_0 (2 i \sqrt{xs})\, ds \tag{16}$$

De (6), (7) y (16)

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial W}{\partial y} = -(T_0 - W_0) e^{-x} e^{-y} J_0 (2 i \sqrt{xy}) \tag{17}$$

Integrado (17) y usando la condición (9)

$$T = T_0 - (T_0 - W_0)\, e^{-y} \int_0^x e^{-s} J_0(2i\sqrt{sy})\, ds \tag{18}$$

Reemplazando en (18) $J_0(2i\sqrt{sy})$ e integrando, obtenemos

$$\frac{T - W_0}{T_0 - W_0} = \frac{1}{e^{-(x+y)}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!}\, x^{k-2}}{(k!)^2} - 1 \tag{19}$$

La ecuación (19) se puede llevar a graficas para uso práctico. Estas gráficas son de la forma en que aparecen en la figura (2).

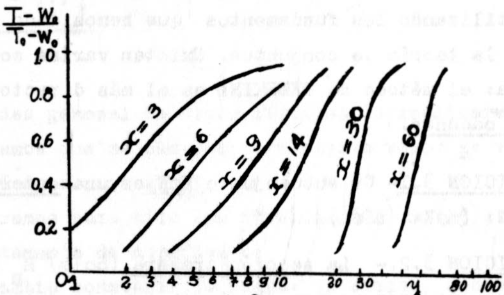

Fig. 2 (a)

BIBLIOGRAFIA

(1) Process Heat Transfer, Kern

(2) Applied Mathematics in Chemical Engineering, Mickley Sherwood and Reed.

(Recibido en el mes de Marzo de 1965)