Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen **29** *(1995), páginas 103–111*

Estabilidad de sistemas lineales impulsivos

RAÚL M. NAULIN
Universidad de Oriente
Cumaná, VENEZUELA

CARLOS R. TAPIA
Universidad Católica de Valparaíso
Valparaíso, CHILE

ABSTRACT. In this work the problem of aymptotic stability of the impulsive system $X' = AX, X(t_k) = BX(t_k^-)$ is studied. By means of examples we show that the asymptotic stability of this system cannot be infered from the asymptotic stability of the linear differential system $X' = AX$, neither from the asymptotic stability of the discrete system $X(k+1) = BX(k)$. A theorem of asymptotic stability for the impulsive system $X' = AX, X(t_k) = BX(t_k^-)$, where A and B are triangular matrices is obtained.
Keywords and phrases. **Impulsive systems, asymptotic stability.**
1991 Mathematics Subject Classification. **Primary 34A37. Secondary 34A30.**
RESUMEN. En este trabajo se estudia el problema de la estabilidad asintótica del sistema lineal impulsivo $X' = AX, X(t_k) = BX(t_k^-)$. Mediante ejemplos se muestra que la estabilidad asintótica de este sistema no proviene de la estabilidad asintótica del sistema diferencial ordinario $X' = AX$ ni de la estabilidad asintótica del sistema discreto $X(k+1) = BX(k)$. Se consigue un teorema de estabilidad asintótica para el caso en que A y B son matrices triangulares.

1. Introducción

El problema de la estabilidad asintótica del sistema lineal ordinario

$$X' = AX, \quad A = \text{ constante},$$

ha sido intensamente estudiado en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. En síntesis esta tarea se reduce al problema algebraico de la estimación de las partes reales de los valores propios de la matriz A. Para detectar la localización de estos valores propios se han elaborado una serie de criterios algebraicos y analíticos entre los cuales destacan el criterio de Routh-Hurwitz y el criterio de Nayquist [3,4].

En este trabajo consideraremos el sistema lineal impulsivo:

$$\begin{aligned} X' &= AX, \quad t \neq t_k, \\ X(t_k) &= BX(t_k^-), \end{aligned} \tag{1}$$

donde A y B son matrices constantes. Las soluciones de todos los sistemas impulsivos considerados en este artículo son funciones de clase C^1 en cada intervalo $[t_k, t_{k+1})$ y con límite por la izquierda $X(t_{k+1}^-)$ en el momento de impulso t_{k+1}. $W(t)$ denotará la matriz fundamental del sistema (1), es decir

$$W(t) = e^{A(t-t_k)}\, Be^{A(t_k-t_{k-1})} \cdots e^{A(t_2-t_1)}\, Be^{At_1}, \qquad t \geq t_k.$$

Definición. Diremos que el sistema (1) es asintóticamente estable si

$$\lim_{t\to\infty} W(t) = 0.$$

El problema de estabilidad asintótica del sistema lineal impulsivo plantea una situación más rica que el sistema lineal ordinario. No se ha descubierto un criterio algebraico de condiciones necesarias y suficientes de estabilidad asintótica del sistema (1) que involucre a las matrices A y B y a la sucesión de tiempos de impulso $\tau = (t_k)_{k=1}^{\infty}$. Probablemente el resultado más cercano a este objetivo ha sido dado por Bainov y Simonov [1] bajo las siguientes condiciones:

C1. Sea $i(s,t]$ la función de recuento de los tiempos de impulso contenidos en el intervalo $(s,t]$. Supongamos la existencia de números positivos p y K que cumplen

$$|i(s,t] - p(t-s)| \leq K, \quad s < t.$$

C2. Las matrices A y B conmutan.

C3. B es una matriz invertible.

Bajo estas condiciones en [1] se demuestra el siguiente

Teorema 1. *Supongamos válidas las condiciones C1, C2 y C3. Entonces una condición necesaria y suficiente para que el sistema (1) sea asintóticamente estable es la condicion Re $\lambda < 0$, donde λ representa a los valores propios de la matriz*

$$\Lambda = A + p \operatorname{Ln} B.$$

Claramente el teorema anterior está lejos de involucrar a la generalidad de los sistemas impulsivos (1). La conmutatividad de las matrices A y B implica que la matriz fundamental del sistema impulsivo (1) es el producto de la matriz fundamental $\Phi(t) = e^{At}$ del sistema

$$X' = AX,$$

y la matriz fundamental $\Psi(i(t)) = B^{i(t)}$ del sistema en diferencias finitas

$$Y(k+1) = BY(k), \quad k = 1, 2, \dots ,$$

donde $i(t)$ denota la función de recuento de tiempos de impulso t_k en el intervalo $[0, t]$.

La tarea de dar condiciones algebraicas de estabilidad asintótica del sistema (1), es decir de dar condiciones que involucren propiedades de las matrices A y B y la sucesión de los tiempos de impulso $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ es un problema que no ha sido resuelto. En este trabajo extenderemos el Teorema 1 a una clase de sistemas que no cumplen la condición de conmutatividad, tales son los sistemas impulsivos triangulares.

En los ejemplos que comentamos a continuación constataremos el papel relevante que juega la distribución de los tiempos de impulso en el problema de la estabilidad asintótica del sistema impulsivo (1).

2. Ejemplos

Consideremos el sistema con tiempos de impulsos equidistantes:

$$\begin{aligned} X' &= AX, \quad t \neq t_k, \\ X(t_k) &= BX(t_k^-), \\ t_{k+1} - t_k &= \theta = \text{ constante.} \end{aligned} \tag{2}$$

Es fácil demostrar que la estabilidad asintótica del sistema (2) es equivalente a la condición siguiente:

C. Todos los valores propios de μ de la matriz $Be^{A\theta}$ satisfacen $|\mu| < 1$.

Definición. *Diremos que la matriz A es ordinariamente estable si sus valores propios λ satisfacen $Re\ \lambda < 0$. Diremos que la matriz B es discretamente estable si sus valores propios μ satisfacen la propiedad $|\mu| < 1$.*

Ejemplo 1. La matriz A es ordinariamente estable, B es discretamente estable, pero para valores apropiados de θ el sistema (2) no es estable. Consideremos el siguiente ejemplo: Sea S la matriz

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definamos A mediante

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} -\ln 2 & 0 \\ 0 & -\ln 2 + \pi i \end{pmatrix} S.$$

Sea B la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz son

$$\mu_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Por un cálculo directo obtenemos para $\theta = 1$ la matriz

$$B \exp(A) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 18 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son

$$\lambda = \frac{11 \pm 2\sqrt{46}}{8}.$$

Estos valores propios muestran que la matriz de Cauchy correspondiente al sistema (2) para $\theta = 1$ no es estable. Por la continuidad de las funciones de valores propios tenemos que en toda una vecindad de $\theta = 1$ el sistema (2) no es estable. Sea Θ el conjunto de los valores de $\theta > 0$ para los cuales el sistema (2) es estable. Para el ejemplo en cuestión este conjunto no es vacío pues

$$\lim_{\theta \to 0^+} B \exp A\theta = B.$$

Esto último dice que para valores pequeños de θ el sistema (2) es estable. Para valores grandes de θ tenemos

$$\lim_{\theta \to \infty} B \exp A\theta = 0,$$

y esto indica que para valores grandes de θ el sistema (2) es estable. Por cálculos mediante computador existen evidencias numéricas de que este conjunto Θ tiene dos componentes conexas, es decir, Θ tiene la forma

$$\Theta = (0, \theta_0) \cup (\theta_1, \infty), \quad \theta_0 < \theta_1.$$

En ejemplos que vienen a continuación veremos que no necesariamente esta es la forma del conjunto Θ. Es fácil demostrar que el conjunto Θ es un conjunto abierto. Aparentemente, para establecer un resultado de condiciones necesarias de estabilidad del sistema (2), es pertinente un estudio completo del conjunto Θ.

Ejemplo 2. La matriz A no es ordinariamente estable, la matriz B no es discretamente estable y sin embargo, existen valores de θ para los cuales el sistema (2) es estable.

Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

En este caso por un cálculo directo obtenemos que

$$\Theta = (\ln(20)/2,\ 3\ln 2).$$

Este ejemplo muestra otra particularidad. Existen valores de θ para los cuales el sistema (2) es estable no obstante no ser estable el sistema ordinario $x' = Ax$ ni el sistema discreto $x(n+1) = Bx(n)$.

Ejemplo 3. El conjunto Θ puede ser vacío. Para demostrar este aserto consideremos el sistema (2), donde ponemos como B la misma matriz que aparece en el Ejemplo 2, y A es la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4. El conjunto Θ puede ser todo el intervalo $(0, \infty)$. Consideremos el sistema (2) para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo sencillo muestra que la matriz $B \exp A\theta$ es discretamente estable para todo valor de $\theta > 0$.

3. Estabilidad de sistemas triangulares

Consideremos el sistema impulsivo (1) donde las matrices A y B tienen la forma triangular superior

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Anotaremos por T la matriz diagonal

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma^{n-1} \end{pmatrix}, \quad n = \text{dimensión}(A), \quad \gamma \neq 0.$$

Si implementamos el cambio de variables $X = TY$ [7] en el sistema (1)-(3), obtendremos el sistema triangular

$$X' = T^{-1}ATX, \qquad X(t_k) = T^{-1}BTX(t_k^-),$$

donde la matriz $T^{-1}AT$ tiene la forma

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} a_{11} & \gamma a_{12} & \cdots & \gamma^{n-1}a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \gamma^{n-2}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

y una forma similar tiene la matriz $T^{-1}BT$. De esta manera $T^{-1}AT$ y $T^{-1}BT$ pueden ser escritas como

$$T^{-1}AT = \Lambda_1 + \Gamma_1(\gamma), \quad \Lambda_1 = \text{diag}\,\{a_{11},\, a_{22},\, \cdots, a_{nn}\}$$

$$T^{-1}BT = \Lambda_2 + \Gamma_2(\gamma), \quad \Lambda_2 = \text{diag}\,\{b_{11},\, b_{22},\, \cdots, b_{nn}\}$$

donde Γ_1 y Γ_2 son matrices que satisfacen

$$|\Gamma_i(\gamma)| \leq M|\gamma|, \qquad M = \text{constante}.$$

La forma particular que tiene el sistema (1)-(3) permite al cambio de variables $X = TY$ actuar exitosamente en la parte ordinaria y discreta del sistema impulsivo. En general estos cambios de variables son difíciles de implementar, pues mediante ellos se trata de simplificar simultáneamente dos sistemas de ecuaciones como son la parte ordinaria y discreta del sistema impulsivo. Este problema ha sido estudiado en [6].

Teorema 2. *Consideremos el sistema (1)-(3), donde B es una matriz invertible. Supongamos que los tiempos de impulso del sistema (1) satisfacen la condición $C1$. Entonces el sistema (1)-(3) es asintóticamente estable si λ, cualquier valor propio de la matriz*

$$A + p \text{ } Ln \text{ } B,$$

cumple la condición

$$Re \text{ } \lambda < 0.$$

Es más, existe $\sigma > 0$ tal que la matriz fundamental del sistema triagular (1)-(3) satisface

$$|W(t)W^{-1}(s)| \leq Ke^{-\sigma(t-s)}. \tag{4}$$

Demostración. En primer lugar observemos que los valores propio de la matriz $A + p$ Ln B coinciden con los valores propios de la matriz diagonal

$$\Lambda_1 + p \text{ Ln } \Lambda_2.$$

Si implementamos el cambio de variables $X = TY$ en el sistema (1)-(3) obtendremos el sistema

$$Y' = (\Lambda_1 + \Gamma_1)Y, \quad Y(t_k) = (\Lambda_2 + \Gamma_2)Y(t_k^-).$$

Vamos a considerar a este último sistema como una perturbación del sistema impulsivo diagonal

$$Z' = \Lambda_1 Z, \quad Z(t_k) = \Lambda_2 Z(t_k^-),$$

cuya matriz fundamental $U(t) = e^{t\Lambda_1 + p(t-s) \text{ Ln } \Lambda_2}$ satisface

$$|U(t)U^{-1}(s)| = \left|e^{(t-s)\Lambda_1 + p(t-s) \text{ Ln } \Lambda_2 + (i(s,t] - (t-s)) \text{ Ln } \Lambda_2}\right| \leq Ke^{-2\sigma(t-s)},$$

para algún $\sigma > 0$ y alguna constante K, que existe en virtud de la hipótesis $C1$. Ahora, por la fórmula de variación de parámetros para sistemas impulsivos [2], obtenemos para la matriz fundamental $W(t)$ del sistema (1)-(3) la ecuación integral

$$W(t)W^{-1}(s) = U(t)U^{-1}(s) + \int_s^t U(t)U^{-1}(\tau)\Gamma_1(\tau)W(\tau)d\tau$$
$$+ \sum_{(s,t]} U(t)U^{-1}(t_k)\Gamma_2(t_k)W(t_k),$$

donde el símbolo $\sum_{(s,t]}$ denota la suma respecto a todos los tiempos de impulso contenidos en el intervalo $(s, t]$. De esta ecuación obtenemos la siguiente desigualdad de Gronwall-Bellman

$$\begin{aligned}|W(t)W^{-1}(s)| \leq & |U(t)U^{-1}(s)| + \int_s^t |U(t)U^{-1}(\tau)\Gamma_1(\tau)W(\tau)W^{-1}(s)|d\tau \\ & + \sum_{(s,t]} |U(t)U(t_k)\Gamma_2(\tau)W(t_k)W^{-1}(s)| \\ \leq & Ke^{-2\sigma(t-s)} + K\int_s^t e^{-2\sigma(t-s)}|\Gamma_1(\tau)||W(\tau)W^{-1}(s)|d\tau \\ & + K\sum_{(s,t]} e^{-2\sigma(t-t_k)}|\Gamma_2(t_k)||W(t_k)W^{-1}(s)| \\ \leq & Ke^{-2\sigma(t-s)} + KM\int_s^t e^{-2\sigma(t-s)}|\gamma||W(\tau)W^{-1}(s)|d\tau \\ & + KM\sum_{(s,t]} e^{-2\sigma(t-t_k)}|\gamma||W(t_k)W^{-1}(s)|.\end{aligned}$$

Denotemos $u(t) = e^{2\sigma(t-s)}|W(t)W^{-1}(s)|$. Entonces la última desigualdad nos da la estimación

$$u(t) \leq K + KM\int_s^t |\gamma|u(\tau)d\tau + KM\sum_{(s,t]} |\gamma|u(t_k).$$

De la desigualdad de Gronwall-Bellman para funciones continuas a trozos [2] se obtiene

$$u(t) \leq K\Pi_{(s,t]}(1 + KM|\gamma|)e^{KM|\gamma|(t-s)},$$

o bien

$$\begin{aligned}|W(t)W^{-1}(s)| &\leq K\Pi_{(s,t]}(1 + KM|\gamma|)e^{(KM|\gamma|-2\sigma)(t-s)}, \\ &\leq Ke^{i(s,t]\ln\,(1+KM|\gamma|)+(KM|\gamma|-2\sigma)(t-s)},\end{aligned}$$

así que para γ suficientemente pequeño se obtiene (4). □

Del Teorema 2 concluimos el siguiente

Corolario 1. *Es condición suficiente para la estabilidad asintótica del sistema triangular (2)-(3) la negatividad de los valores propios de la matriz*

$$\theta A + \text{Ln } B.$$

Finalmente, destacamos el trabajo [6], donde se dan otras condiciones suficientes de estabilidad asintótica para el sistema (1), y el trabajo [7], que trata el problema de la estabilidad condicionada de este sistema.

4. Agradecimientos

Esta investigación ha sido respaldada por los Proyectos CI - 5 - 025 - 00730/95, Consejo de Investigaciones de la Universidad de Oriente, Venezuela y DGI 124.724/93, Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Referencias

1. D. D. Bainov & P. S. Simeonov, *Systems with Impulse Effect (Stability, Theory and Applications)*, Ellis Horwood and John Wiley, New York, 1989.
2. ______, *Integral Inequalities and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.
3. G. Birkhoff & G. C. Rota, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley, New York, 1969.
4. L. Cesari, *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*, Ergebnisse der Mathematic, Springer, Berlin, 1971.
5. N. V. Milev & D. D. Bainov, *Stability of linear impulsive differential equations*, Int. J. Systems Sci. **21 No. 11** (1990), 2217–2224.
6. R. Naulin, *Splitting of linear differential systems with impulsive effect*, (submitted) (1995).
7. ______, *Sufficient conditions for asymptotic stability of linear autonomous impulsive systems*, (submitted) (1993).
8. R. Naulin & M. Pinto, *Quasidiagonalization of linear impulsive systems and applications.*, (submitted) (1993).
9. G. Papachinopoulos & J. Schinas, *Criteria for an exponential dichotomy of difference equations*, Chechoslovak Mathematical Journal **35(110)** (1985), 295–299.

(Recibido en julio de 1994)

Raúl M. Naulin
Escuela de Ciencias
Universidad de Oriente
Apartado 245, Cumaná
VENEZUELA
e-mail: rnaulin@sucre.udo.edu.ve

Carlos R. Tapia
Instituto de Matemáticas
Universidad Católica de Valparaíso
Casilla 4059, Valparaíso
CHILE
e-mail: ctapia@aixl.ucv.cl