L A   A X I O M A T I Z A C I O N y L O S N U M E R O S

N A T U R A L E S   II

Por

Ewal Burger.

COMO CONSTRUIR EL ORDEN A PARTIR DE LOS AXIOMAS DE PEANO.

Al intentar demostrar los teoremas 2.3-2.5 en una teoría de números naturales basada sólo en los axiomas de PEANO, se ve fácilmente que las demostraciones dadas se trasladan a tal teoría, después de haber introducido una relación de orden entre los números naturales tal que 0 sea el elemento mínimo de N respecto a este orden y n' sea el mínimo elemento de N mayor que n. Así resulta el problema de definir el orden natural de N basándose únicamente en los axiomas de PEANO y no utilizando los fundamentos que hemos dado de los números naturales en la teoría de conjuntos. Existen varías soluciones para este problema: el método de DEDEKIND es el más directo y se basa en la teoría de cadenas.

DEFINICION 3.1- Un subconjunto $K \subseteq N$ es una cadena si y sólo si para todo $n \in N$: $(n \in K \Rightarrow n' \in k)$.

DEFINICION 3.2.- La sección trasera (cola) H_n es la intersección de todas las cadenas que contienen a n; es decir:

$$H_n = \bigcap \{K / \ K \text{ es una cadena, } n \in K .\}$$

DEFINCION 3.3.- Para n,m, $n<m$ si y sólo si $m \in H_n$ y $m \neq n$.

Antes de dar la demostración de que esta relación $(n < m)$ es una relación de orden, vamos a enunciar algunos teoremas auxiliares.

TEOREMA 3.1.- H_n es una cadena que cóntiene a n.

TEORMA 3.2.- $H_n = H_{n'} \cup \{n\}$

Demostración.- Cada cadena que contiene a n debe contener a n', por tanto $\{K/K \text{ es una cadena, } n \in K\} \subset \{K / K \text{ es una cadena, } n' \in K\}$; lue go.

$$H_n \supseteq H_{n'} \cup \{n\}$$

Por otra parte, si K es una cadena que contiene a n', entonces $K \cup \{n\}$ es una cadena que contiene n; luego $H_n \subseteq K \cup \{n\}$ para toda cadena K que contiene a n', es decir $H_n \subseteq H_{n'} \cup \{n\}$.

<u>TEOREMA 3.3</u> .- si $v \in H_n$, $v \neq n \Rightarrow$ existe $\mu \in H_n$ tal que $\mu' = v$.

Demostración.- Consideremos $H_n - \{v\} = \{r \in N / r \in H_n, r \neq v\}$. Como v pertenece a todas las cadenas que contienen a n, el conjunto $H_n - \{v\}$ no puede ser una cadena que contenga a n ($n \neq v$), y como $n \in H_n - \{v\}$, este conjunto no puede ser una cadena. Por tanto, existe $\mu \in H_n - \{v\}$ tal que $\mu' \notin H_n - \{v\}$, y por ser H_n una cadena y dado que $\mu \in H_n$, debe tenerse $\mu' \in H_n$. Y como $\mu' \in H_n - \{v\}$, resulta $\mu' = v$.

<u>TEOREMA 3.4</u>.- $0 \in H_{n'} \Rightarrow n = 0$.

Demostración.- Supongamos por el contrario que $0 \in H_n$ y $n \neq 0$. Entonces por el teorema 3.3, existe $\mu \in H_n$ con $\mu' = 0$, contrario al tercer axioma de PEANO.

<u>TEOREMA 3.5</u>.- $n \notin H_{n'}$.

Demostración; Supongamos que $n \in H_{n'}$. Consideremos $K = CH_{n'}$. Afirmamos que es una cadena. En efecto: sea $v' \notin k$ entonces $v' \in H_{n'}$; si $v' \neq n'$, por el teorema 3.3, existe $\mu \in H_{n'}$ tal que $\mu' = v'$. Por el cuarto axioma de PEANO, $\mu = v$, y por tanto $v \in H_{n'}$, es decir, $v \notin K$: si $v' = n'$, es evidente. Luego K es una cadena. Pero además $0 \notin K$ porque sino $k = N$ y $H_{n'} = \emptyset$ (por el axioma 5 de PEANO). Si $0 \notin K$ resulta que $0 \in H_{n'}$, lo cual, por el teorema 3.4, nos dá $n' = 0$, contrario al axioma 3 de PEANO. Por tanto, $n \in H_{n'}$.

Utilizando los anteriores podemos demostrar el

<u>TEOREMA 3.6</u>.- La relación $<$ definida arriba (def. 3.3) es una relación de orden; es decir:

(01') no $(n < n)$

(02) $n < m, \wedge, m < r \Rightarrow n < r$

(03) $n \neq m \Rightarrow (n < m, \vee, m < n)$

Demostración.- (01') resulta inmediatamente de la definición 3.3. La condición (02) la demostraremos por inducción sobre r (esto-basta!): $r = 0$, tendríamos que $n < 0$ lo cual es imposible, ya que entonces, en el caso contrario, tendríamos que $m = 0 = n$ (teorema 3.4); luego (02) se satisface trivialmente. Supongamos ahora que (02) es válido para r y demostrémoslo para r'. Sea entonces $m < r'$, es decir $r' \in H_m$ y $r' \neq m$; entonces por el teorema 3.3 existe $\mu \in H_m$ tal que $\mu' = r'$, es decir, $\mu = r$, y por tanto $r \in H_m$; ahora bien si $r \neq m$, se tendrá $m < r$, y por tanto $n < r$ (recuérdese que por la hipótesis $n < m$). Si $m = r$, el caso es trivial. Es decir, $n < r$. Pero entonces $r' \in H_n$ y $n \neq r'$ porque si $n = r'$ entonces $r \in H_n = H_{r'}$, contrario al teorema 3.5. Luego $n < r'$.

Para demostrar (03) basta demostrar que: para todo m,n, se tiene que $n \in H_m, \vee, m \in H_n$. Usamos inducción: fijemos un m cualquiera (resp. n) y vamos a demostrar que para todo n (resp. m) $\in N$: $n \in H_m, \vee, m \in H_n$. En efecto, para n (resp. m) $= 0$, ciertamente $m \in H_0$ (resp. n), ya que $H_0 = N$, por el axioma 5 de PEANO. Tomemos por hipótesis de inducción que para algún n (resp. m) $\in N$ se tenga : $n \in H_m, \vee, m \in H_n$ para todo m (resp. n). En primer lugar si $n \in H_n$, entonces $n' \in H_n$ por teorema 3.1; en segundo lugar , si $m \in H_n$ entonces por teorema 3.2 resulta $m \in H_{n'}$ o $m = n$. Si $m = n$ resulta que $n = m \in H_m$ y por tanto $n' \in H_m$, por teorema 3.1, en todo caso se tiene $n' \in H_m, \vee, m \in H_{n'}$.

Queda por demostrar el siguiente teorema :

<u>TEOREMA 3.7.-</u> Para la relación de orden definida arriba

a) 0 es el elemento mínimo de N

b) n' es el elemento mínimo de los números naturales mayores que n.

<u>Demostración:</u> a) Como se observó anteriormente, $H_0 = N$, es decir $0 \leqslant n$ para todo $n \in N$.

b) $n' \in H_n$ por teorema 3.1, es decir, $n \leqslant n'$. Pero $n \neq n'$. En efecto: $0 \neq 0'$, por el tercer axioma de PEANO; sea, por hipótesis, $n \neq n'$.- Si $n' = (w)'$ resulta por axioma 4 que $w' = n$ contrario a la hipótesis de inducción . Así pués $n < n'$ para todo $n \in N$. Sea ahora $m \in N$ arbitrario tal que $n < m$, es decir: $m \in H_n$ y $m \neq n$. Entonces por teorema 3.1, $m \in H_{n'}$, es decir: $n' \leqslant m$. Así pués, n' es el menor elemento de N mayor que n.

Con este teorema la teoría de los números naturales basada únicamente en los axiomas de PEANO está suficientemente desarrollada para demostrar el teorema de iteración y sus generalizaciones. Otro métodopara introducir el orden en los naturales y demostrar los teoremas de iteración y sus generalizaciones, utilizando únicamente los axiomas de PEANO, es descrito por LANDAU en el libro citado anteriormente. Este método es menos sencillo que el de DEDEKIND y utiliza el siguiente artificio: demostrar en primer lugar un caso especial del teorema de iteración sin utilizar el orden, a saber el caso de la adición (ver nota al teorema 2.3). En seguida definir el orden por medio de la adición. Expondremos en detalle este método de LANDAU.

TEOREMA 3.8.- Para cada $n \in N$ existe una única función $F_n : N \to N$ con las propiedades:

a) $F_n(0) = n$

b) para todo $n \in N$: $F_n(v') = (F_n(v))'$

Se escribe: $F_n(v) = n + v$.

Demostración.- La unicidad se prueba, como en el teorema 2.3, usando únicamente los axiomas de PEANO.

La existencia de la función F_n se demuestra por inducción sobre el parámetro n. Para $n = 0$, la función definida por $F_0(v) = v$ tiene las propiedades deseadas. Supongamos ahora que para $n \geq 0$ se ha determinado una función F_n con las propiedades deseadas. Entonces la función $F_{n'}$ definida por $F_{n'}(v) = (F_n(v))'$ posee las propiedades deseadas, en efecto:

a) $F_{n'}(0) = (F_n(0))' = n'$

b) $F_{n'}(v') = (F_n(v'))' = ((F_n(v))')' = (F_{n'}(v))'$.

NOTA.- En virtud de la unicidad de las funciones F_n, la demostración muestra que:

i) $0 + v = v$

ii) $n' + v = (n + v)'$.

Habiéndose introducido la adición, el orden puede definirse como sigue:

<u>DEFINICION 3.4</u> .- $n < m$ si y sólo si existe $\mu \in N$ tal que $m = n + \mu'$.

<u>TEOREMA 3.9</u>.- La relación de la definición 3.4 es una relación de orden para los números naturales, a saber:

(01') no $(n < n)$

(02) $n < m, \wedge, m < r \Rightarrow n < r$

(03) $n \neq m \Rightarrow n < m, \vee, m < n$.

<u>Demostración</u> .- (01') Usamos inducción completa sobre n: para $n = 0$, $0 < 0$ es imposible, porque en el caso contrario, $0 = 0 + \mu' = \mu'$, contrario al axioma 3 de PEANO. Por hipótesis de inducción; supongamos que no $(n < n)$; entonces $n' < n'$ no puede tenerse, porque, en caso contrario, existe $\mu \in N$ tal que $n' = n' + \mu'$; pero el axioma 4 de PEANO implicaría entonces que $n = n + \mu'$, es decir, $n < n$, lo cual es contrario a la hipótesis.

(02) Para demostrar la <u>transitividad</u>, es necesario demostrar la asociatividad de la adición: $(m+n) + r = m + (n+r)$. La demostración por inducción sobre r, por ejemplo, la dejamos al lector. Supongamos ahora que $n<m, \wedge, m<r \Rightarrow$ existen $\mu, \lambda \in N$ tales que: $m = n + \mu', \wedge$, $r = m + \lambda'$; entonces $r = n + (\mu' + \lambda') = n + (\mu' + \lambda)'$; es decir, $n<r$.

(03) Sea $m \neq 0$ fijo, y demostremos por inducción sobre n que

$$n \neq m \Rightarrow n < m, \vee, m < n$$

Si $n = 0$, y $m \neq 0$, tenemos que m es sucesor de algún número natural μ y por eso $m = \mu' = 0 + \mu'$; es decir, $0 < m$. Supongamos ahora que $n \neq m \Rightarrow n < m, \vee, m < n$. Sea ahora $n' \neq m$. Si $n = m$, entonces $n' = (n + 0)' = n + 0' = m + 0'$, es decir, $m<n'$. Si $n \neq m$, por hipótesis de inducción, $n<m, \vee, m<n$. En primer caso $(n<m)$ tenemos la igualdad $m = n + \mu'$, donde $\mu \neq 0$. Por tanto, μ debe ser un sucesor; por ejemplo, $\rho' = \mu$. Entonces, $m = n + (\rho')' = (n + \rho')' = n' + \rho'$, es decir, $n' < m$. Si $m<n$, tenemos $n = m + \mu'$, y entonces $n' = (m + \mu')' = m + (\mu')'$; es decir: $m<n'$. En todo caso, hemos logrado el resultado:

$$n' \neq m \Rightarrow m<n', \vee, n'<m$$

completando la inducción.

Para poder aún demostrar los teoremas de recurrencia es necesario todavía demostrar que para el orden definido por la definición 3.4, 0 es el elemento mínimo de N y que n´es el menor elemento de entre los mayores que n. La demostración de estas afirmaciones es sencilla y la dejamos al cuidado del lector.

Finalmente, vamos a discutir un tercer método para introducir el orden en los números naturales, demostrando en primer lugar el teorema de iteración (¡basándonos únicamente en los axiomas de PEANO!), e introduciendo luego la adición y con ella el orden.

<u>TEOREMA 2.3</u> .- Sean X un conjunto arbitrario, $x_o \in X$, arbitrario; $F: X \to X$, arbitraria, N el conjunto de los números naturales. Entonces existe una única función $G: N \to X$ con las propiedades

$$\text{(a) } G(0) = x_o$$
$$\text{(b) } \forall n \in N: G((n')) = F(G(n))$$

<u>Demostración (Sin utilizar el orden)</u>: Como en la demostración anterior de la unicidad de G no intervino el orden, ella permace válida. Para demostrar la existencia introducimos el concepto de <u>solución parcial</u>. Una función $H: M \to X$ se dice una solución parcial si satisface las propiedades:

$$\text{(i) } M \subseteq N$$
$$\text{(ii) } 0 \in M \Rightarrow H(0) = x_o$$
$$\text{(iii) } n' \in M \Rightarrow (n \in M, \wedge, H(n') = F(H(n))$$

<u>Vamos a demostrar que para todo $n \in N$, existe una solución parcial con $n \in M$.</u> Esta demostración se efectúa por inducción respecto a **n**. Para $n = 0$, basta tomar $M = \{0\}$, y $H(0) = x_o$. Sea por hipótesis de inducción $H: M \to X$ una solución parcial con $n \in M$. Si ya $n' \in M$, H es una solución parcial tal que $n' \in M$. Si $n' \notin M$, consideremos la función $H': M \cup \{n'\} \to X$ definida por

$$H'(v) = \begin{cases} H(v) & \text{si } v \in M \\ F(H(n)) & \text{si } v = n' \end{cases}$$

Es claro entonces que H´es una solución parcial con $M' = M \cup \{n'\}$ y tal que $n' \in M'$.

En segundo lugar demostramos que si dos soluciones parciales contienen a n en sus dominios de definición, entonces el valor de ambas soluciones en n es el mismo. Por inducción $n = 0$ es trivial. Supongamos cierta afirmación para un valor n, y consideremos las soluciones parciales $H: M \to X$, $H^*: M^* \to X$, con $n' \in M \cap M^*$. Entonces por (iii), tenemos que $n \in M \cap M^*$ y, por hipótesis de inducción $H(n) = H^*(n)$; luego $H(n') = F(H(n)) = F(H^*(n)) = H^*(n')$, como queríamos demostrar.

Finalmente, definimos $G: N \to X$ así: $G(n)$ es el valor común de todas las soluciones parciales tales que $n \in M$. Evidentemente, $G(0) = x_0$. Sea $n \in N$ y sea H cualquier solución parcial definida para el argumento n'. Entonces $H(n') = G(n')$, y como además, por (iii), H está definida para n, se tiene $G(n) = H(n)$. Pero, otra vez (iii), $H(n') = F(H(n))$; así pués: $G(n') = F(G(n))$. Esto demuestra la existencia de una G con las propiedades deseadas.

Con esto terminamos el resumen de los diversos métodos para introducir el orden en los naturales y demostrar el teorema de iteración y sus generalizaciones. Observemos todavía que en el caso en que se haya introducido el orden de los números naturales basándose sólo en los axiomas de PEANO y no utilizando la definición de los números naturales como ordinales finitos, se puede finalmente ligar el concepto de este orden con los ordinales y su ordenamiento, demostrando el siguiente:

TEOREMA 3.10.- Si se ha introducido un orden en el conjunto N de tal modo que 0 sea el elemento mínimo de N y n' el mínimo entre los números mayores que n, entonces, utilizando sólo los axiomas de PEANO puede demostrarse que:

(a) para cada n: el segmento $S_n = (\{v \,/\, v<n\}, <)$ es doblemente bien ordenado;
(b) para cada conjunto doblemente bien ordenado existe un número natural n tal que S_n tiene el mismo tipo de orden del conjunto doblemente bien ordenado;
(c) $n<m$ si y sólo si el tipo de orden de S_n es menor que el tipo de orden S_m.

Demostración: (a) Vamos a demostrar por inducción sobre n: para $n = 0$, $S_o = \emptyset$, y $\emptyset$ está trivialmente doblemente bien ordenado. Supongamos S_n doblemente bien ordenado; como n' es el elemento mínimo de los mayores que n, el segmento $S_{n'}$ se origina añadiendo a S_n n, el cual es el mayor de los elementos de $S_{n'}$, es decir el tipo de orden de $S_{n'}$ es el sucesor del tipo de orden de S_n y como el sucesor de un tipo doblemente bien ordenado es tambien doblemente bien ordenado, la demostración se completa.

(b) ver demostración del teorema 2.1

(c) sea $n < m$, entonces S_n es el segmento determinado por el elemento n en el conjunto ordenado S_m; por eso el tipo de orden de S_n es menor que el tipo de orden de S_m. Recíprocamente, sea el tipo de orden de S_n menor que el tipo de orden de S_m. Entonces $m < n$ es imposible, porque entonces S_m es el segmento determinado por m en S_n, con lo cual el tipo de S_m sería menor o igual que el tipo de orden de S_n

Evidentemente, este teorema establece el vínculo entre los dos métodos para desarrollar la teoría de los números naturales: el desarrollado basándose en los axiomas de PEANO y el que fundamenta la dicha teoría en la teoría general de conjuntos. Por otra parte, sólo hasta este instante es preciso distinguir entre los dos métodos con cuidadosa precisión.

4.- NUMEROS CARDINALES Y NUMEROS NATURALES

Damos a continuación un grupo de teoremas sobre los conjuntos finitos y sus números cardinales. Intuitivamente parece legítima la siguiente definición:

DEFINICION 4.1 .- Un conjunto E se llama finito si y sólo si, existe $n \in N$ tal que E sea equipotente con $\{v \in N \ / \ v < n\}$, es decir, existe una correspondencia biunívoca entre E y S_n . Consecuencia inmediata de la definición y del teorema 3.10, es el

TEOREMA 4.1.- Un conjunto E es finito si y sólo si E puede ser doblemente bien ordenado.

Un problema que surge de la definición 4.1 es la unicidad del número natural n que en ella figura. La respuesta es afirmativa:

TEOREMA 4.2.- Sean $n,m \in N$; si S_n es equipotente con S_m, entonces $n = m$.

Demostración: Vamos a demostrar por inducción que para todo $n \in N$ no existe $m \neq n$ con $\{v / v < m\}$ equipotente con $\{v / v < n\}$. Para $n = 0$, la afirmación es trivial porque $\{v / v < m\} \neq \emptyset$ si $m \neq 0$ (si $m \neq 0$, existe μ tal que $\mu' = m \Rightarrow \mu < m$). Supongamos ahora que para algún n la afirmación es válida; consideremos $\{v \in N / v < n'\}$, y supongamos que $S_{n'}$ es equipotente con S_m $(m \neq n')$. Es claro que como $S_{n'} \neq \emptyset$ $(n' \neq 0)$, entonces $m \neq 0$. Por tanto, existe $\mu \in N$ tal que $\mu' = m$; es decir $S_{n'}$ y $S_{\mu'}$ son equipotentes. Sea C una correspondencia biunívoca entre $S_{n'}$ y $S_{\mu'}$; podemos suponer que $C(n') = \mu' = m$, sin perder generalidad. Pero entonces $C|S_n$ es una correspondencia biunívoca de S_n sobre S_μ, y por hipótesis de inducción, $n = \mu$; de donde $m = \mu' = n'$.

DEFINICION 4.2.- El número cardinal $|E|$ del conjunto finito E es el único número natural n para el cual E es equipotente con $S_n = \{v \in N / v < n\}$.

Evidentemente, dos conjuntos finitos son equipotentes si y sólo si sus números cardinales son iguales; **además, un conjunto cualquiera** equipotente con un conjunto finito, tambien es finito y tiene el mismo cardinal.

Finalmente, cada número natural n es el número cardinal de un conjunto finito, a saber de $\{v / v < n\}$. Por lo tanto, los números naturales pueden servir de representantes unívocos de los números cardinales (finitos) en el sentido de la teoría general de los conjuntos finitos, es decir, de los conjuntos **doblemente** bien ordenados.

Como los números naturales se introdujeron como números ordinales de los conjuntos doblemente bien ordenados, se ve que, en particular, dado un conjunto finito E su número cardinal ya define unívocamente el número ordinal de cualquier doble buen orden de E; en otras palabras: un conjunto finito no admite más que un solo tipo de buen orden. Es más, es fácil ver que un conjunto no permite más que un solo tipo de buen orden.

El teorema siguiente expresa otra cualidad bien conocida de los conjuntos finitos:

TEOREMA 4.3.- Sea E un conjunto finito, $E_1 \subseteq E$ un subconjunto propio de E. Entonces E_1 es finito y $|E_1| < |E|$.

Demostración: Vamos a efectuarla por inducción sobre el número (cardinal) de E. Para $|E| = 0$, la afirmación es trivial, puesto que entonces $E = \emptyset$ y no existe subconjuntos propios de E. Supongamos la afirmación cierta para un $|E| = n$ arbitrario. Sea ahora $|E| = n'$; es decir, existe una correspondencia biunívoca C de $\{v / v < n'\}$ sobre E. Si $C(n) \notin E_1$, entonces, por tenerse $\{v / v < n'\} = \{v / v < n\} \cup \{n\}$, debe tenerse $E_1 \subseteq C(\{v / v < n\})$ y, por hipótesis de inducción, $|E_1| \leq n$, y por tanto $|E_1| < n'$. Si $C(n) \in E_1$, entonces $E_1 - \{C(n)\} \neq E - \{C(n)\}$ porque en caso contrario $E = E_1$. Ahora por tenerse $E_1 - \{C(n)\} \subseteq E - \{C(n)\} = C(\{v / v\ v < n\})$, resulta por la hipótesis de inducción que

$$|E_1 - \{C(n)\}| < n;$$

es decir, $E_1 - \{C(n)\}$ es equipotente con $\{v / v < \mu\}$, $\mu < n$. Entonces, ciertamente, E_1 es equipotente con $\{v / v < \mu'\}$, ó bien, $|E_1| = \mu' \leq n < n'$, con lo cual queda demostrado el teorema.

COROLARIO.- Dados dos números naturales n,m, decir que $n < m$ es equivalente a decir que todo conjunto finito con cardinal n es equipotente a un subconjunto de un conjunto finito con cardinal **m**, pero no viceversa.

Demostración: Si $n < m$, el conjunto $\{v \in N / v < n\}$ es un subconjunto $\{v \in N / v < m\}$, pero $\{v \in N / v < m\}$ no es equipotente con un subconjunto de $\{v \in N / v < n\}$, porque (teorema 4.3) cada subconjunto de $\{v \in N / v < n\}$ posee un cardinal $\leq n$, y por eso ciertamente diferente de m. Recíprocamente: si el conjunto finito E es equipotente con un subconjunto del conjunto finito E_1, entonces $|E| \leq |E_1|$ (teorema 4.3). Si además E_1 no es equipotente con un subconjunto de E, entonces ciertamente $|E| \neq |E_1|$, es decir, $|E| < |E_1|$.

NOTA: El corolario demuestra que el orden < entre los números naturales, es precisamente el orden usual entre cardinales cuando — —

los números naturales, se toman como representantes de los números cardinales finitos, en el sentido de la nota anterior. Vamos a ver que una anotación análoga puede hacerse a la adición de números naturales:

TEOREMA 4.4.- Sean E_1, E_2, dos conjuntos finitos tales que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, entonces $E_1 \cup E_2$ es finito y

$$|E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2|$$

Demostración: Sea E_1 fijo, y efectúemos inducción sobre $|E_2|$. Si $|E_2| = 0$, $E_2 = \emptyset$ y $E_1 \cup E_2 = E_1$, de donde resulta

$$|E_1| + |E_2| = |E_1| + 0 = |E_1 \cup E_2|$$

y la afirmación es válida. Supongámosla cierta para algún n, y consideremos $|E_2| = n'$; es decir, E_2 es equipotente con $\{v \in N \mid v < n'\}$. Entonces eliminando de E_2 un (conveniente) elemento e, ciertamente resultará un conjunto E_3 con $|E_3| = n$. Por hipótesis de inducción, resulta

$$|E_1 \cup E_3| = |E_1| + n$$

y como $e \notin E_1 \cup E_3$, se sigue evidentemente que

$$\begin{aligned} |E_1 \cup E_2| &= |E_1 \cup E_3 \cup \{e\}| = (|E_1| + n)' \\ &= |E_1| + n' = |E_1| + |E_2|, \end{aligned}$$

y la inducción está terminada.

NOTA: Ya hemos observado que el teorema 4.4 muestra cómo la adición de los números naturales concebidos como representantes de los números cardinales de los conjuntos finitos, es precisamente la adición usual entre números cardinales.

Finalmente demostraremos la equivalencia entre la definición de finitud de un conjunto dada arriba y la definición bien conocida de DEDEKIND, por medio de una correspondencia biunívoca entre el conjunto y un subconjunto propio.

TEOREMA 4.5.- Un conjunto E es finito si y sólo si no existe ningún subconjunto propio de E equipotente con E.

Demostración: Si E es finito, por teorema 4.3 cada subconjunto propio de E tiene un número (cardinal) menor que el de E, y por eso no puede ser equipotente a E. si E no es finito, vamos a demostrar que E tiene un subconjunto equipotente con N, y evidentemente la aplicación $n \to n'$ realiza una correspondencia biunívoca de N y un subconjunto propio de N. Entonces evidentemente existe un subconjunto propio de E equipotente con E.

TEOREMA 4.6.- Sea X un conjunto no finito, entonces existe un subconjunto de X equipotente con el conjunto N de los números naturales.

Demostración: Para cada subconjunto finito E de X existen elementos en X - E, y por el axioma de elección existe una función ζ que a cada subconjunto finito E de X hace corresponder un elemento $\zeta(E) \in X - E$. Sea $\hat{X}$ el conjunto de todas las funciones $A_n \to X$, para $A_n = \{\nu \in N \,/\, \nu \leq n\}$ con n cualquiera. Para tal función $f: A_n \to X$, el conjunto imagen $f(A_n) \subset X$ está en correspondencia biunívoca con un subconjunto de A_n, y por esto y por el teorema 4.3, $f(A_n)$ es también finito. Así pues, podemos definir la función $F: \hat{X} \to X$, así:

$$F(f) = \zeta(f(A_n))$$

para $f: A_n \to X$. Aplicando el teorema 2.5, se deduce ($e \in X$ es un elemento arbitrario, fijo) la existencia de una función $G: N \to X$ tal que:

$$G(o) = \zeta(e) = \zeta(\{e\})$$

$$G(n') = F(G|A_n), \text{ para todo } n \in N.$$

Afirmamos que G es biunívoca. En efecto: sean $n < m$ números naturales arbitrarios. Entonces $m \neq o$, y por tanto existe $\mu \in N$ tal que $\mu' = m$. Entonces $n \leqslant \mu < \mu' = m$. de aquí se deduce que $G(m) = G(\mu') = F(G|A_\mu) = \zeta((G|A_\mu)(A_\mu))$; así pues, $G(m) \neq G(v)$ para cada $\nu \in A_\mu$. En particular, $G(m) \neq G(n)$, y G es ciertamente biunívoca. Luego G(N) es un subconjunto de X equipotente con N, tal como queríamos demostrar.