Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen **29** *(1995), páginas 113–117*

Una nota sobre espacios localmente completos

THOMAS E. GILSDORF

University of North Dakota, USA

ABSTRACT. Using standard locally convex spaces techniques, it is shown that local completeness is preserved under the formation of closed subspaces, projective limits, Cartesian products and locally convex direct sums. We also prove that if every bounded set in a locally convex space is contained in a bounded disk that generates a reflexive space, then the space is semi-reflexive and that a regular inductive limit of such locally reflexive spaces is also semi-reflexive.

Key words and phrases. Locally complete, Banach disk, locally reflexive.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 46A03. Secondary 46A30.

RESUMEN. Usando técnicas estandar de espacios localmente convexos, se muestra que la completez local se preserva bajo la formación de subespacios cerrados, límites proyectivos, productos cartesianos y sumas directas localmente convexas. Demostramos también que si todo conjunto acotado en un espacio localmente convexo está contenido en un disco acotado que genera un espacio reflexivo, entoces el espacio es semi-reflexivo y que los límites inductivos regulares de tales espacios localmente reflexivos es también semi-reflexivo.

1. Introducción

En este artículo, *espacio* será sinónimo de espacio localmente convexo de Hausdorff. Un *disco* será un conjunto convexo y balanceado. Si E es un espacio y B es un disco acotado en E, dotaremos al subespacio vectorial generado por B de la topología generada por el funcional de Minkowski p_B de B. No es difícil ver que esta topología está dada por una norma. Denotaremos este espacio con E_B y escribiremos (E_B, p_B) cuando sea necesario especificar la norma. Si el espacio E_B es un espacio de Banach para p_B, diremos que B es un *disco de Banach*. Si cada conjunto acotado está contenido en un disco acotado de Banach, diremos que E es *localmente completo*.

Observamos que según [5; 5.1.6 pag. 152] un espacio es localmente completo si y sólo si todo disco acotado y cerrado en E es un disco de Banach. En este artículo demostraremos que la propiedad de ser localmente completo se preserva en los subespacios cerrados y bajo la formación de productos arbitrarios, sumas directas y límites proyectivos arbitrarios. También demostraremos que cuando cada conjunto acotado de E está contenido en un disco acotado B tal que E_B es reflexivo entonces el espacio E es semi-reflexivo. Este resultado será útil en el examen de los límites inductivos regulares.

2. Algunas propiedades hereditarias de espacios localmente completos

2.1 Teorema. *(a) Si E es localmene completo y F es un subespacio cerrado de E, entonces F es localmente completo.*
Si $\{E_i; i \in I\}$ es una colección de espacios localmente completos, entonces:
(b) El producto $\Pi\{E_i; i \in I\}$ es localmente completo.
(c) El límite proyectivo de $\{E_i; i \in I\}$ es localmente completo.
(d) La suma directa (localmente convexa) $\bigoplus\{E_i; i \in I\}$ es localmente completa.

Demostración.
(a) Sea F un subespacio cerrado de E. Sea B cualquier disco acotado y cerrado en F. Tenemos que B es cerrado en E. Además, B es acotado en E y, por lo tanto, B es un disco acotado de Banach en E [5; 5.1.6 pag. 152]. Como E_B está contenido en F, E_B coincide con F_B, así que B es un disco acotado de Banach en F. Entonces, F es localmente completo [5; 5.1.6 pag. 152].

(b) Sea I cualquier conjunto de índices y supongamos que para todo $i \in I$, E_i es localmente completo. Sea

$$E = \Pi\{E_i; i \in I\}$$

con la topología producto y supongamos que A es un subconjunto acotado de E. Si $\pi_i : E \to E_i$ es la proyección de E sobre E_i, entonces $\pi_i(A)$ es acotado en E_i, para todo $i \in I$. Entonces, para cada $i \in I$, $\pi_i(A)$ está contenido en B_i, donde B_i es un disco acotado de Banach en E_i. Sea

$$B = \Pi\{B_i; i \in I\}.$$

Claramente B es un disco. Además, B es acotado en E [1; 15.6(13) pag. 155]. Solo nos queda por demostrar que E_B es completo. Para hacerlo, sea $(x_n : n =$

$1,2,\ldots)$ una sucesión de Cauchy en E_B y sea $x_{i,n} = \pi_i(x_n)$ $(n = 1,2,\ldots, i \in I)$. Entonces, para cada $k = 1,2,\ldots$, existe un entero positivo $N = N(k)$ tal que si $n, m \geq N$ entonces

$$x_m - x_n \in k^{-1}B.$$

Así, para cada $i \in I$,

$$x_{i,m} - x_{i,n} \ \in \pi_i(k^{-1}B) = k^{-1}B_i. \qquad (*)$$

Denotemos con F_i el espacio vectorial generado por B_i y dotemoslo de la topología del funcional de Minkowski de B_i. Como para todo $i \in I$ F_i es completo, existe $x_i \in F_i$ tal que $x_{i,n} \to x_i$ cuando $n \to \infty$. Sea $x = (x_i : i \in I)$. Fijemos n en $(*)$ y hagamos $m \to \infty$. Obtenemos que para cualquier $k = 1,2,\ldots$, y n suficientemente grande,

$$x_i - x_{i,n} \in k^{-1}B_i$$

para cada i, y, por lo tanto, que

$$x - x_n \ \in k^{-1}B.$$

Entonces, $x_n \to x$ para la topología de E_B. Luego, para n suficientemente grande, $x - x_n \in B$ (y $x_n \in E_B$), lo que implica que

$$x = (x - x_n) + x_n \in E_B.$$

(c) Si E es el límite proyectivo de $\{E_i : i \in I\}$ entonces, por [1; 19.10(3) pag. 233], E es un subespacio cerrado de $\Pi\{E_i : i \in I\}$. La afirmación es consecuencia entonces de las partes *(a)* y *(b)*.

(d) Sea

$$E = \oplus\{E_i : i \in I\},$$

la suma directa de los espacios localmente completos E_i. Sea A un subconjunto acotado de E. De [1; 18.5(4) pag. 213] vemos que A está contenido y es acotado en una suma directa finita, la cual denotamos con

$$\oplus\{E_j : j = 1,\ldots,n\},$$

donde n es algún entero positivo. Una suma directa finita es equivalente a un producto [1; 18.5(2) pag. 212]. Entonces $\oplus\{E_j : j = 1,\ldots,n\}$ resulta ser localmente completo por *(b)*. Esto asegura que A está contenido en algún B, donde B es un disco de Banach en $\oplus\{E_j : j = 1,\ldots,n\}$. Como B es también acotado en E, tenemos que B es un disco acotado de Banach en E. Esto completa la demostración. □

2.2 Nota. Un límite inductivo de espacios localmente completos no es necesariamente localmente completo. Tampoco es cierto que los espacios cocientes de espacios localmente completos sean localmente completos. El lector puede encontrar contraejemplos en [2] y [5].

3. Espacios localmente reflexivos

Existen espacios localmente completos que resultan ser semi-reflexivos: los *espacios localmente reflexivos.*

3.1 Definición. *Sea B un disco acotado en un espacio E. Si E_B es reflexivo, diremos que B es un disco reflexivo. Si cada conjunto acotado en E está contenido en un disco reflexivo, diremos que el espacio E es localmente reflexivo.*

Observamos que como todo espacio normado reflexivo es de Banach entonces todo espacio localmente reflexivo es localmente completo. Además, los espacios de Banach no reflexivos son ejemplos (simples) de espacios localmente completos no localmente reflexivos.

3.2 Teorema. *Cualquier espacio localmente reflexivo es semi-reflexivo.*

Demostración. Supongamos que E es localmente reflexivo para la topología τ. Según [1; 23.3 (1) pag. 299], basta demostrar que todo conjunto cerrado y acotado en E es compacto para la topología débil $s(E, E')$. Sea A un tal subconjunto de E. Entonces A está contenido en algún B, donde B es un disco acotado y (E_B, p_B) es un espacio reflexivo. Claramente A es acotado en (E_B, p_B). Además, como la topología de p_B es más fina que τ restringida al subespacio E_B, entonces A es p_B–cerrado. Por lo tanto, A es $s(E_B, E'_B)$–compacto. Si F es E_B dotado de $\tau|_{E_B}$ entonces, por la continuidad de la identidad $id : (E_B, p_B) \to E$, tenemos que $s(E_B, E'_B)$ es más fina que $s(F, F')$. Por lo tanto, A es $s(F, F')$–compacto, de lo cual, A es también $s(E, E')$–compacto. □

Para establecer el corolario siguiente, recordamos que, cuando $\{E(n) : n = 1, 2, ...\}$ es una sucesión de espacios localmente convexos tal que para cada $n = 1, 2, ..., E(n) \subset E(n+1)$ e $id : E(n) \to E(n+1)$ es continua, se dice que el límite inductivo $\text{ind}_n E(n)$ es *regular* si cada uno de sus subconjuntos acotados está contenido y es acotado en algún $E(n)$.

3.3 Corolario. *Un límite inductivo regular de espacios localmente reflexivos es localmente reflexivo y semi-reflexivo.*

Demostración. Supongamos que $E = \text{ind}_n E(n)$, donde cada $E(n)$ es localmente reflexivo. Si $A \subset E$ es acotado, entonces A está contenido y es acotado en algún $E(n)$, así que existe un disco reflexivo B en $E(n)$ que contiene a A. Por la continuidad de $id : E(n) \to E$, es claro que B es también un disco reflexivo en E. Entonces, E es localmente reflexivo y por el teorema anterior, E es semi-reflexivo. □

3.4 Notas.

(i) Obviamente un espacio normado reflexivo es localmente reflexivo, y por el Teorema de Mackey [1; 20.11(7) pag. 254], tales espacios con sus topologías débiles son también localmente reflexivos. Así, considerando el caso de un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita, vemos que hay espacios localmente reflexivos que no son metrizables, es decir, que no son de Banach.

(*ii*) Puede ser que un límite inductivo de espacios semireflexivos no sea semireflexivo [4;5-v, pag. 10]. En [3; Thm 4, pag. 367] y [5;8.5.25 (*i*), pag. 292] se ha establecido que si cada $E(n)$ es un espacio de Banach reflexivo y $E = \text{ind}_n E(n)$ es regular entonces E es semi-reflexivo. El Corolario 3.3 y la Nota 3.4 (*i*) nos dicen que el mismo resultado es válido para espacios $E(n)$ más generales, es decir, para espacios localmente reflexivos.

Agradecimientos. Doy gracias al referee por sus observaciones y comentarios sobre la versión preliminar del presente trabajo.

Referencias

1. G. KÖTHE, *Topological Vector Spaces I*, Springer-Verlag, 1969.
2. J. KUCERA & K. MCKENNON, *Köthe's example of an incomplete LB-space*, Proc. AMS **93** no. 1 (1985), 79–80.
3. J. KUCERA & K. MCKENNON, *Dieudonné-Schwartz theorem on bounded sets in inductive limits*, Proc. AMS **78** no. 3 (1980), 366–368.
4. K. MCKENNON & J. ROBERTSON, *Locally Convex Spaces*, Marcel Dekker, 1976.
5. P. PÉREZ-CARRERAS & J. BONET, *Barrelled Locally Convex Spaces*, North Holland Math. Studies 131, 1987.

(Recibido en noviembre de 1994)

THOMAS E. GILSDORF
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF NORTH DAKOTA
GRAND FORKS, ND 58202-8376, U.S.A.
e-mail: gilsdorf@plains.nodak.edu