## ESTUDIO DE LAS INTEGRALES $\int x^n e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx$ y $\int x^n e^{ax} \cos bx\, dx$

Por

ROBERTO NAVARRO GONZALEZ.

(Facultad de Minas, U. N.)

El objeto del presente trabajo es poner de manifiesto el tipo de polinomio a que da lugar la integración de las funciones mencionadas en el título y calcular, en función de los parámetros n, a y b, los coeficientes de dicho polinomio, con lo que la integración de funciones de este tipo resulta inmediata.

Existen dos caminos clásicos para la integración de tales funciones. Uno de ellos consiste en expresar sen x y cos x por medio de las fórmulas de Euler:

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sen} bx &= \frac{e^{bix} - e^{-bix}}{2i} && (1)\\ \cos bx &= \frac{e^{bix} + e^{-bix}}{2} && (2)\end{aligned}\right.$$

y luego asimilar los exponentes de e que resultan de la parte trigonométrica al exponente ax que ya se tenía, con lo que queda la integral original escindida en integrales del tipo

$$\int x^n e^{kx}\, dx \qquad (3)$$

donde k es un número complejo. Integrando ahora (3) por partes, haciendo

$$\left\{\begin{aligned} u &= x^n && (4)\\ dv &= e^{kx}\, dx && (5)\end{aligned}\right.$$

la integral (3) nos quedará en función de otra del tipo

$$\int x^{n-1} e^{kx}\, dx \qquad (6)$$

Continuando, pues, la integración por partes, ha de llegarse forzosamente a la integral

$$\int e^{kx}\,dx \tag{7}$$

que es inmediata:

Para poner el resultado de modo que no haga referencia al campo complejo, bastará transformar las exponenciales de exponente imaginario puro del modo siguiente:

$$\begin{cases} e^{mix} = \cos mx + i \operatorname{sen} mx & (8) \\ e^{-mix} = \cos mx - i \operatorname{sen} mx & (9) \end{cases}$$

Las expresiones (8) y (9) se deducen de las (1) y (2). Al aplicarlas al desarrollo total de la primitiva, los términos imaginarios se compensarán entre sí.

El otro procedimiento consiste en observar que se cumple la igualdad

$$x^n e^{ax} \operatorname{sen} bx = \frac{\partial^n (e^{ax} \operatorname{sen} bx)}{\partial a^n} \tag{10}$$

por cuyo motivo se puede escribir

$$\int x^n e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{\partial^n (\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx)}{\partial a^n} \tag{11}$$

y análogamente sucede poniendo <u>cos bx</u> en lugar de <u>sen bx</u>, de modo que ahora todo se reduce a calcular las integrales

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx \tag{12}$$

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx \tag{11}$$

lo cual se logra integrándolas ambas por partes, haciendo <u>$u = e^{ax}$</u> en una y otra. Con ello queda una de estas integrales en función de la otra, lo que da lugar a un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, que resuelto nos da:

$$\begin{cases} \int e^{ax} \text{ sen } bx \, dx = \dfrac{e^{ax}(a \text{ sen } bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} & (12) \\[2em] \int e^{ax} \cos bx \, dx = \dfrac{e^{ax}(b \text{ sen } bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} & (13) \end{cases}$$

Por consiguiente, derivando parcialmente **n** veces con respecto a a cada una de estas últimas expresiones, tendremos resueltas las integrales propuestas.

Tanto un método como el otro nos muestra que la función primitiva es en ambos casos un polinomio del tipo

$$A_0 x^n e^{ax} \text{ sen } bx + B_0 x^n e^{ax} \cos bx + A_1 x^{n-1} e^{ax} \text{ sen } bx$$
$$+ B_1 x^{n-1} e^{ax} \cos bx + A_2 x^{n-2} e^{ax} \text{ sen } bx + B_2 x^{n-2} e^{ax} \cdot$$
$$\cos bx + \ldots\ldots + A_{n-1} x e^{ax} \text{ sen } bx + B_{n-1} x e^{ax} \cos bx$$
$$+ A_n e^{ax} \text{ sen } bx + B_n e^{ax} \cos bx \qquad (14)$$

En este trabajo adoptaremos y confirmaremos esta hipótesis, dando además las expresiones de los coeficientes en función de n, a y b, para uno y otro tipo de integral. A fin de distinguir los coeficientes que resultan cuando el integrando lleva sen bx de aquellos a que da lugar la integral con cos bx, pondremos a los últimos una coma alta (').

Observaremos ante todo que la derivada de la función

$$x^n e^{ax} \text{ sen } bx \qquad (15)$$

vale

$$n x^{n-1} e^{ax} \text{ sen } bx + a x^n e^{ax} \text{ sen } bx + b x^n e^{ax} \cos bx \quad (16)$$

y que análogamente la derivada de la función

$$x^n e^{ax} \cos bx \qquad (17)$$

vale

$$n\,x^{n-1}\,e^{ax}\cos bx \;+\; a\,x^{n}\,e^{ax}\cos bx \;-\; b\,x^{n}\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx \qquad (17)$$

Por consiguiente, admitiendo la validez del desarrollo (14), al derivarlo aparecerán términos de los siguientes tipos:

$$\left\{\begin{array}{ll} x^{n}\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx & x^{n}\,e^{ax}\cos bx \\ x^{n-1}\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx & x^{n-1}\,e^{ax}\cos bx \\ x^{n-2}\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx & x^{n-2}\,e^{ax}\cos bx \\ \vdots & \vdots \\ x\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx & x\,e^{ax}\cos bx \\ e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx & e^{ax}\cos bx \end{array}\right\} \qquad (18)$$

Habrá, por tanto, $\underline{2(n+1)}$ clases de términos semejantes, del mismo modo que hay en el desarrollo (14) $\underline{2(n+1)}$ coeficientes indeterminados. Haciendo igual a 1 el coeficiente de $\underline{x^{n}\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx}$ que resulte de la derivación de (14) para la integral con $\underline{\mathrm{sen}\,bx}$, y haciendo lo propio con el de $\underline{x^{n}\,e^{ax}\cos bx}$ en la integral con $\underline{\cos bx}$ y anulando todos los demás, tendremos un sistema de $\underline{2(n+1)}$ ecuaciones con $\underline{2(n+1)}$ incógnitas, que resuelto nos dará los coeficientes de (14) y por tanto toda la integración ya efectuada.

Empecemos trabajando con la integral con $\underline{\mathrm{sen}\,bx}$. En este caso, la derivada del desarrollo (14) debe ser igual a $x^{n}\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx$. Por tanto, se tendrá:

$$\begin{aligned} x^{n}\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx = {} & nA_0\,x^{n-1}\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx + aA_0\,x^{n}\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx + \\ & + bA_0\,x^{n}\,e^{ax}\cos bx + nB_0\,x^{n-1}\,e^{ax}\cos bx + aB_0\,x^{n}\,e^{ax}\cdot \\ & \cos bx - bB_0\,x^{n}\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx + (n-1)A_1\,x^{n-2}\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx + \\ & + aA_1\,x^{n-1}\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx + bA_1\,x^{n-1}\,e^{ax}\cos bx + (n-1)B_1\cdot \end{aligned}$$

$x^{n-2}\, e^{ax} \cos bx + aB_1\, x^{n-1} e^{ax} \cos bx - bB_1\, x^{n-1}\, e^{ax} \operatorname{sen} bx$
$+ (n-2)A_2\, x^{n-3}\, e^{ax} \operatorname{sen} bx + aA_2\, a^{n-2}\, e^{ax} \operatorname{sen} bx + bA_2\, x^{n-2}\, e^{ax}$
$\cos bx + (n-2)B_2\, x^{n-3}\, e^{ax} \cos bx + aB_2\, x^{n-2}\, e^{ax} \cos bx - bB_2 \cdot$
$x^{n-2}\, e^{ax} \operatorname{sen} bx +$

........................

$+ A_{n-1}\, e^{ax} \operatorname{sen} bx + aA_{n-1}\, x\, e^{ax} \operatorname{sen} bx + bA_{n-1}\, x\, e^{ax} \cos bx$
$+ B_{n-1}\, e^{ax} \cos bx + aB_{n-1}\, x\, e^{ax} \cos bx - bB_{n-1}\, x\, e^{ax} \operatorname{sen} bx$
$+ aA_n\, e^{ax} \operatorname{sen} bx + bA_n\, e^{ax} \cos bx + aB_n\, e^{ax} \cdot$
$\cos bx - bB_n\, e^{ax} \operatorname{sen} bx \qquad (19)$

Reuniendo ahora los términos semejantes e igualando a 0 todos los coeficientes del segundo miembro, excepto el de $\underline{x^n\, e^{ax} \operatorname{sen} bx}$, que se iguala a 1, queda el siguiente sistema de ecuacionnes:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl}
 & & aA_0 & - & bB_0 & = & 1 \\
 & & bA_0 & + & aB_0 & = & 0 \\
nA_0 & + & aA_1 & - & bB_1 & = & 0 \\
nB_0 & + & bA_1 & + & aB_1 & = & 0 \\
(n-1)A_1 & + & aA_2 & - & bB_2 & = & 0 \\
(n-1)B_1 & + & bA_2 & + & aB_2 & = & 0 \\
 & & \vdots & & & & \\
A_{n-1} & + & aA_n & - & bB_n & = & 0 \\
B_{n-1} & + & bA_n & + & aB_n & = & 0
\end{array}\right\} \qquad (20)$$

Las ecuaciones generales de este sistema (con la sola excepción de la primera, que no se ajusta a ellas) son:

$$\left.\begin{array}{l}
(n-k)A_k + aA_{k+1} - bB_{k+1} = 0 \\
(n-k)B_k + bA_{k+1} + aB_{k+1} = 0
\end{array}\right\} \qquad (21)$$

La particular disposición de este sistema lineal permite resolverlo del modo que sigue: Por una parte, de las dos primeras ecuaciones resulta:

$$A_0 = \frac{a}{a^2 + b^2} \tag{22}$$

$$B_0 = -\frac{b}{a^2 + b^2} \tag{23}$$

mientras que, por otra parte, de la resolución de las ecuaciones generales resultan las siguientes fórmulas recurrentes:

$$A_{k+1} = -\frac{(n-k)(aA_k + bB_k)}{a^2 + b^2} \tag{24}$$

$$B_{k+1} = -\frac{(n-k)(aB_k - bA_k)}{a^2 + b^2} \tag{25}$$

Las fórmulas (24) y (25) nos permiten calcular $A_1$ y $B_1$ a partir de $A_0$ y $B_0$, $A_2$ y $B_2$ a partir de $A_1$ y $B_1$, y asi sucesivamente. Con ello, el sistema de ecuaciones (20) se descompone en $\underline{n+1}$ Sistemas de 2 ecuaciones, cada uno de los cuales se resuelve a continuación del anterior. Como quiera que, procediendo asi, el determinante del sistema vale siempre $\underline{a^2 + b^2}$, si $\underline{a}$ y $\underline{b}$ son dos números reales cualequiera, no nulos simultáneamente, el sistema (20) será compatible y determinado.

La aplicación reiterada de las fórmulas recurrentes (24) y (25), a partir de $\underline{k = 0}$ y aumentando $\underline{k}$ de unidad en unidad conduce al siguiente interesante resultado:

$$A_1 = -\frac{n(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2} \tag{26}$$

$$B_1 = \frac{n.2ab}{(a^2 + b^2)^2} \tag{27}$$

$$A_2 = \frac{n(n-1)(a^3 - 3ab^2)}{(a^2 + b^2)^3} \qquad (28)$$

$$B_2 = - \frac{n(n-1)(3a^2b - b^3)}{(a^2 + b^2)^3} \qquad (29)$$

$$A_3 = - \frac{n(n-1)(n-2)(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)}{(a^2 + b^2)^4} \qquad (30)$$

$$B_3 = \frac{n(n-1)(n-2)(4a^3b - 4ab^3)}{(a^2 + b^2)^4} \qquad (31)$$

$$A_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4)}{(a^2 + b^2)^5} \qquad (32)$$

$$B_4 = - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(5a^4b - 10a^2b^3 + b^5)}{(a^2 + b^2)^5} \qquad (33)$$

etc.

En la formación de estos coeficientes se observan los siguientes - puntos:

a) En la letra A antecede el signo menos en los términos de subíndice impar y no ocurre ello en los de subíndice par.

En la letra B la regla es contraria.

b) En el numerador se encuentra un factor que vale $\underline{n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-k+1)}$, siendo $\underline{k}$ el subíndice, tanto en la letra A como en la B.

c) El otro factor del numerador contiene, para la letra A, los términos de lugar impar del desarrollo de $\underline{(a+b)^{k+1}}$, dándoles alternativamente signo "más" y signo "menos" comenzando por signo "más".

Para la letra B, contiene los términos de lugar par del mismo desarrollo, dándoles asi mismo alternativamente signos "más" y "menos" y comenzando tambien por el signo "más" .

d) El denominador vale $\underline{(a^2 + b^2)^{k+1}}$, para ambas letras.

De ser cierto esto indefinidamente podríamos dar la expresión general de $A_k$ y $B_k$ del siguiente modo:

$$A_k = \frac{(-1)^k \; n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-k+1)\left[\binom{k+1}{0}a^{k+1} - \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \binom{k+1}{4}a^{k-3}b^4 - \ldots\right]}{(a^2+b^2)^{k+1}} \qquad (34)$$

$$B_k = \frac{-(-1)^k \; n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-k+1)\left[\binom{k+1}{1}a^{k}b - \binom{k+1}{3}a^{k-2}b^3 + \binom{k+1}{5}a^{k-4}b^5 - \ldots\right]}{(a^2+b^2)^{k+1}} \qquad (35)$$

La validez general de estas fórmulas la realizaremos por inducción. Supongamos que se cumplen para cierto valor $\underline{k}$: veremos cómo siguen cumpliéndose para $\underline{k+1}$.

Consideremos para ello las fórmulas (24) y (25), las cuales nos ponen inmediatamente de manifiesto:

a) El cambio constante de signo: en efecto, ambas comienzan por un signo "menos".

b) La aparición de los factores sucesivos $\underline{n}$, $\underline{n-1}$, $\underline{n-2}$, etc., pues en $A_1$ ($k = 0$) tendremos el factor $\underline{n}$, en $A_2$ ($k = 1$) se añadirá el factor $\underline{n-1}$, en $A_3$ ($k = 2$) el factor $\underline{n-2}$, y así sucesivamente.

c) El crecimiento, de unidad en unidad, del exponente de $\underline{a^2 + b^2}$ en el denominador para subíndice $1(k = 0)$ el exponente es 2, pues ya arrastramos el denominador $\underline{a^2 + b^2}$ procedente del subíndice 0. Para subíndice $2(k = 1)$ el exponente será 3, y así sucesivamente.

De modo que lo que queda por aclarar es el segundo factor de los numeradores. Para ello reemplacemos en (24) los valores de $A_k$ y $B_k$ dados respectivamente en (34) y (35). Tendremos, expresando el signo "menos" inicial por un aumento de unidad en el exponente de $\underline{-1}$:

$$A_{K+1} =$$

$$\frac{(-1)^{k+1} \cdot n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)\left[\binom{k+1}{0}a^{k+2} - \binom{k+1}{2}a^{k}b^{2} + \binom{k+1}{4}a^{k-2}b^{4} - \ldots\right]}{(a^2+b^2)^{k+2}}$$

$$+ \frac{(-1)^{k+1} \cdot n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)\left[-\binom{k+1}{1}a^{k}b^{2} + \binom{k+1}{3}a^{k-2}b^{4} - \binom{k+1}{5}a^{k-4}b^{6} + \ldots\right]}{(a^2+b^2)^{k+2}} \qquad (36)$$

(Hemos introducido el nuevo factor $\underline{n-k}$, hemos aumentado en una unidad el exponente del denominador, hemos multiplicado por $\underline{a}$ los términos del segundo factor del numerador de $A_k$ y por $\underline{b}$ los correspondientes de $B_k$, pasando a dichos términos el signo "menos" con que empieza el valor de $B_k$ en (35). )

Las dos fracciones de que se compone el segundo miembro de (36) tienen como factor común todo menos lo encerrado entre corchetes. Con respecto a estos factores no comunes, resulta, teniendo presentes las propiedades de los números combinatorios:

$$\binom{k+1}{0} = \binom{k+2}{0} = 1 \qquad (37)$$

$$\binom{k+1}{2} + \binom{k+1}{1} = \binom{k+2}{2} \qquad (38)$$

$$\binom{k+1}{4} + \binom{k+1}{3} = \binom{k+2}{4} \qquad (39)$$

etc.

Las últimas relaciones nos permiten escribir

$$A_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)\left[\binom{k+2}{0}a^{k+2} - \binom{k+2}{0}a^{k}b^{2} + \binom{k+2}{4}a^{k-2}b^{4} - \ldots\right]}{(a^2 + b^2)^{k+2}} \qquad (40)$$

lo cual prueba la tesis para la letra A, pues las expresiones (34) y (40) son análogas.

Para la letra B el camino demostrativo es parecido. Resultará, en efecto:

$$B_{k+1} = -\frac{(-1)^{k+1} \cdot n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)\left[\binom{k+1}{1}a^{k+1}b - \binom{k+1}{3}a^{k-1}b^{3} + \binom{k+1}{5}a^{k-3}b^{5} - \ldots\right]}{(a^2 + b^2)^{k+2}}$$

$$+ \frac{(-1)^{k+1} \cdot n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)\left[\binom{k+1}{0}a^{k+1}b - \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^{3} + \binom{k+1}{4}a^{k-3}b^{5} - \ldots\right]}{(a^2 + b^2)^{k+2}}$$

$$= -\frac{(-1)^{k+1} \cdot n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)\left[\binom{k+2}{1}a^{k+1}b - \binom{k+2}{3}a^{k-1}b^{3} + \binom{k+2}{5}a^{k-3}b^{5} - \ldots\right]}{(a^2 + b^2)^{k+2}} \qquad (41)$$

La tesis para B queda, pues, también demostrada.

De este modo podemos escribir:

$$\int x^n e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx = \sum_{k=0}^{k=n} A_k x^{n-k} e^{ax} \operatorname{sen} bx + \sum_{k=0}^{k=n} B_k x^{n-k} e^{ax} \cos b \qquad (42)$$

siendo los valores generales de $A_k$ y $B_k$ los dados respectivamente por (34) y (35).

El estudio de la integral con <u>cos bx</u> queda muy simplificado por basarse en gran parte en el de la integral con <u>sen bx</u>.

El sistema de ecuaciones para hallar los coeficientes resulta ser el mismo (20), con excepción de las dos primeras ecuaciones, - que son ahora:

$$\begin{cases} aA'_0 - bB'_0 = 0 \\ bA'_0 - aB'_0 = 1 \end{cases} \tag{43}$$

Del sistema formado por las ecuaciones (43) se deducen los - valores de $A'_0$ y $B'_0$, que dan:

$$A'_0 = \frac{b}{a^2 + b^2} \tag{44}$$

$$B'_0 = \frac{a}{a^2 + b^2} \tag{45}$$

Como quiera que las demás ecuaciones del sistema general son las mismas las fórmulas (24) y (25) siguen siendo válidas en esta integral. Aplicándol**as reiteradamente,** van quedando las expresiones de los coeficientes siguientes:

$$A'_1 = -\frac{n.2ab}{(a^2 + b^2)^2} \tag{46}$$

$$B'_1 = -\frac{n(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2} \tag{47}$$

$$A'_2 = \frac{n(n-1)(3a^2b - b^3)}{(a^2 + b^2)^3} \tag{48}$$

$$B'_2 = \frac{n(n-1)(a^3 - 3ab^2)}{(a^2 + b^2)^3} \tag{49}$$

$$A'_3 = -\frac{n(n-1)(n-2)(4a^3b - 4ab^3)}{(a^2+b^2)^4} \qquad (50)$$

$$B'_3 = -\frac{n(n-1)(n-2)(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)}{(a^2+b^2)^4} \qquad (51)$$

etc.

Por comparación de estos coeficientes con los de la integral con <u>sen bx</u>, resulta:

$$A'_k = -B_k \qquad (52)$$

$$B'_k = A_k \qquad (53)$$

expresiones que podemos tambien generalizar por inducción. En efecto, admitido esto para cierto valor de <u>k</u>, expresemos $A'_{k+1}$ y $B'_{k+1}$ en función de $A'_k$ y $B'_k$ por medio de las expresiones (24) y (25); que, como dijimos, son válidas tambien aquí. Tendremos:

$$A'_{k+1} = \frac{-(n-k)(aA'_k + bB'_k)}{a^2+b^2} = \frac{-(n-k)(-aB_k + bA_k)}{a^2+b^2} =$$

$$= \frac{(n-k)(aB_k - bA_k)}{a^2+b^2} = -B_{k+1} \qquad (54)$$

$$B'_{k+1} = \frac{-(n-k)(aB'_k - bA'_k)}{a^2+b^2} = \frac{-(n-k)(aA_k + bA_k)}{a^2+b^2} = A_{k+1} \qquad (55)$$

Los coeficientes de la integral con <u>cos bx</u> son, pues, los mismos de la integral con <u>sen bx</u>, sin más que trocar entre sí las letras A y B, y además preceder con signo "menos" a las expresiones de los coeficientes cuyo subíndice sea impar, en <u>ambas letras</u>.

Presentamos a continuación un par de ejemplos de integración llevados a cabo por este método.

a) Sea la integral

$$\int x^2 e^x \operatorname{sen} 2x \, dx$$

en la que tenemos : $n = 2$ ; $a = 1$ ; $b = 2$ ; $a^2 + b^2 = 5$

Resultará (substituyendo directamente en las fórmulas (22), (23), (26), (27), (28) y (29)).

$$A_0 = \frac{1}{5} \qquad B_0 = -\frac{2}{5}$$

$$A_1 = -\frac{2(1-4)}{25} = \frac{6}{25} \qquad B_1 = \frac{2.2.2}{25} = \frac{8}{25}$$

$$A_2 = \frac{2(1-3.4)}{125} = -\frac{22}{125} \qquad B_2 = -\frac{2(3.2-8)}{125} = \frac{4}{125}$$

con lo que tenemos ya:

$$\int x^2 e^x \operatorname{sen} 2x \, dx = \frac{1}{5} x^2 e^x \operatorname{sen} 2x - \frac{2}{5} x^2 e^x \cos 2x + \frac{6}{25} x e^x \operatorname{sen} 2x$$

$$+ \frac{8}{25} x e^x \cos 2x - \frac{22}{125} e^x \operatorname{sen} 2x + \frac{4}{125} e^x \cos 2x$$

b) Sea la integral

$$\int x^2 e^{2x} \cos 2x \, dx$$

$$(n = 2 \; ; \; a = 2 \; ; \; b = 2 \; ; \; a^2 + b^2 = 8)$$

El cálculo de los coeficientes, por medio de las fórmulas (44) a (49) nos dará ahora:

$$A'_0 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \qquad B'_0 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$A'_1 = -\frac{2.2.2.2}{8^2} = -\frac{1}{4} \qquad B'_1 = -\frac{2(4-4)}{8^2} = 0$$

$$A'_2 = \frac{2.1(3.4.2 - 8)}{8^3} = \frac{1}{16} \qquad B'_2 = \frac{2.1(8 - 3.2.4)}{8^3} = -\frac{1}{16}$$

resultando con ello;

$$\int x^2 e^{2x} \cos 2x \, dx = \frac{1}{4} x^2 e^{2x} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} x^2 e^{2x} \cos 2x$$

$$-\frac{1}{4} x e^{2x} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{16} e^{2x} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{16} e^{2x} \cos 2x$$

Quedan por estudiar algunos casos particulares, en que se dan condiciones especiales en los parámetros a y b, materia que dejamos para un próximo trabajo.

(Recibido en Octubre de 1.964)