UNA SERIE INFINITA RELACIONADA CON EL CONJUNTO DE NUMEROS RACIONALES.

Por YU TAKEUCHI.

Sea

$$R = \{ x_1, x_2, x_3, \ldots \} \tag{1}$$

Una sucesión de los números racionales en $[0,1]$. Se va a estudiar la convergencia de la siguiente series;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \frac{1}{|x - x_x|} \tag{2}$$

Primero; Para $x(\notin R)$ dado, existe un reordenamiento de los números racionales en $[0,1]$ tal que la serie (2) diverge a infinito, de la siguiente manera;

$x(\notin R)$ es punto de acumulación de los números racionales, entonces existe una sucesión $\{ X_{k_1}, X_{k_2}, X_{k_3} \ldots \}$ tal que

$$|X - X_{k_n}| < \frac{1}{4^n}$$

Tomamos un ordenamiento de los racionales $\{ y_1, y_2, y_3, \ldots.. \}$ tal que

$$Y_{2n} = X_{k_n} \quad (n = 1,2,3,\ldots)$$

entonces se tiene

$$\frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{|x - Y_{2n}|} > 1$$

Por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot |x - Y_n|} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n} \cdot |x - Y_{2n}|} = \infty$$

Segundo; vamos a demostrar que la serie (2) converge para casi todo punto x del intervalo $[0,1]$, para este objeto tomemos el recubrimiento abierto de R;

$$A^{(k)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{(k)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(x_n - \frac{1}{k.a^n},\ x_n + \frac{1}{k.a^n}\right) \quad (3)$$

$$(1 < a)$$

Evidentemente

$$A^{(1)} \supset A^{(2)} \supset A^{(3)} \supset \ldots \quad (4)$$

Sea $A_a = \bigcap_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$

entonces

$$R \subset A_a \quad \text{y} \quad m(A_a) = 0.$$

y además A_a es un conjunto no-enumerable.

Si $X \in A_a$, y , $x \notin R$

entonces

$$x \in A^{(k)}, \text{ para todo } k. \quad (5)$$

Suponemos que x pertenece a los intervalos

$$I_{k_1}^{(k)},\ I_{k_2}^{(k)},\ I_{k_s}^{(k)},\ \ldots,\ I_{k_s}^{(k)} \ldots \quad (6)$$

Si la sucesión (6) de los intervalos es finita, entonces x ya no pertenece a $A^{(k)}$ para k suficientemente grande ya que el radio del intervalo disminuye cuando k aumenta, este contradice a (5), por lo tanto la sucesión (6) es infinita. De (6) se obtiene

$$|x - x_{k_s}| < \frac{1}{k \cdot a^{k_s}} \quad (7)$$

entonces la serie (2) diverge para este x, si $a \geqslant 2$.

Si $x \notin A_a$, entonces existe k tal que

$$x \notin A^{(k)}$$

es decir

$$x \notin I_n^{(k)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

luego, se obtiene;

$$|x - x_n| > \frac{1}{k \cdot a^n}$$

Por lo tanto la serie converge para $x \notin A_a$, si $a < 2$.

Sea
$$S_1 = \left\{ x \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{|x - x_n|} \text{ converge, } x \in [0,1] \right\}$$

$$S_2 = R \cup \left\{ x \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{|x - x_n|} = \infty , \; x \in [0,1] \right\} \tag{8}$$

entonces, de las discuciones anteriores se obtiene:

$$\left.\begin{array}{lll} S_1 \supset [0,1] - A_a & & \text{para todo } a < 2 \\ & & \\ S_2 \supset A_a & & \text{para todo } a \geq 2 \end{array}\right\} \tag{9}$$

pero como

$$m(A_a) = 0, \quad m\left\{[0,1] - A_a\right\} = 1 \quad \text{(para todo a)}$$

entonces

$$m(S_1) = 1, \qquad m(S_2) = 0 \tag{10}$$

y además S_2 es un conjunto no-enumerable. Para a fijo (menor que 2), el conjunto A_a depende del ordenamiento de los racionales, (1). Tomemos la unión de A_a para todo los reordenamiento de los raciones (nótese que la unión no es enumerable),

$$B = \bigcup A_a \quad \text{(unión para reordenamiento, a es fijo)} \tag{11}$$

entonces se tiene

$$B \supset [0,1]$$

ya que para cualquier $x \notin R$ existe un reordenamiento tal que la serie (2) es divergente, es decir, x pertenece a A_a $(a < 2)$ para tal reordenamiento.