

NOTAS MATEMATICAS

Nota sobre el cambio de variable en las integrales definidas

POR

LUIS IGNACIO SORIANO, U. N.

En los textos mas frecuentemente empleados por nuestros alumnos de las Facultades técnicas no se hacen indicaciones de ninguna clase sobre las precauciones que es necesario tomar en el caso de cambio de variable en las integrales definidas; El siguiente ejemplo hará ver la necesidad de ser cuidadosos.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$$

Si hubiéramos hecho el cambio de variable $x = \frac{1}{u}$
se tendría que para $x = -1$ $u = -1$ y para $x = 1$, $u = 1$,

$$dx = -\frac{du}{u^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} \text{ se transforma en } \frac{u^2}{1+u^2}$$

y la nueva integral sería

$$\int_{-1}^1 -\frac{du}{u^2} \frac{u^2}{1+u^2} = -\int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^2} = -\frac{\pi}{2}$$

La falla aquí depende de que $\frac{1}{x} = u$ no está definida en todo el intervalo.

Otro ejemplo puede encontrarse en Advanced Calculus por Ivan S. Sokolnikoff, páginas 124 a 126 donde se encuentra también la demostración del siguiente teorema:

Sea $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea $y = \phi(t)$ una función continua de t , que tiene una derivada continua en el intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$ donde $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$

Entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$