UNA NOTA SOBRE LA CONTINUIDAD UNIFORME

Por
YU TAKEUCHI, U.N.

[1][2][3][4][5] [6]

En los libros de la teoria de funciones de variable real, la definición de la continuidad uniforme es así;

DEFINICION 1

$f(x)$ es uniformemente continua en S si dada ε existe δ tal que

$$|x - y| < \delta \quad x, y \in S \text{ implica } |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Este concepto se puede ampliar en la siguiente forma;

DEFINICION 2

$f(x)$ es uniformemente continua en S si dada ε existe δ tal que

$$|x - y| < \delta, \quad y \in S \quad \text{implica } |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

En este caso, x puede ser un punto exterior de S. (Evidentemente x debe pertenecer al dominio de $f(x)$.)

El teorema de Heine se puede modificar como sigue;

TEOREMA DE HEINE

Si $f(x)$ es continua en oada punto de un conjunto compacto S entonces $f(x)$ es uniformemente continua en S. (Nótese que el dominio de -- $f(x)$ puede ser más grande que S.)

Como aplicación de esta definición, se va a demostrar el siguiente teorema.

TEOREMA

$f(x)$ es integrable-Riemann en $[a,b]$ y además

$$f(x) = 0 \text{ si } x \in S, \quad 0 \le f(x) \le M \text{ si } x \notin S$$

entonces $$\int_a^b f(x)\, dx \le M\, \overline{m}(S)$$

NOTA

En base de la teoría de la integral-Lebesgue, la demostración es sumamente trivial ya que

$$\int_a^b f\,dx = \int_S f\,dx + \int_{[a,b]-S} f\,dx = \int_S f\,dx \leq M \int_S dx = M\,\overline{m}\,(S).$$

Sinembargo, para la integral Riemann, el primer paso de la igualdad anterior no es válido.[3][4]

DEMOSTRACION

Sea D el conjunto de todos los puntos de discontinuidades de $f(x)$ en $[a, b]$ entonces

$$\overline{m}\,(D) = 0. \quad \text{Integrabilidad-Riemann de } f(x)\text{[3][4]} \qquad (1)$$

Sea
$$S_o = S \cup D \qquad (2)$$

entonces
$$\overline{m}\,(S_o) \leq \overline{m}(S) + \overline{m}(D) = \overline{m}\,(S) \qquad (3)$$

Dada ϵ, existe un número numerable de intervalos abiertos disyuntos;

$$I_k = (a_k\,, b_k) \quad k = 1, 2, 3, \ldots \text{ tales que}$$

$$S_o \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\,, \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) \leq \overline{m}\,(S_o) + \frac{\epsilon}{2M} \qquad (4)$$

(Definición de la medida exterior)

Como $\cup I_k$ es abierto, entonces

$$T = [a, b] - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

es un conjunto cerrado, luego T es compacto, por lo tanto $f(x)$ es continua uniformemente en T (Def. 2). Es decir, dada ϵ existe δ tal que

$$|x - y| < \delta \quad x \in T \text{ implica } |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \qquad (5)$$

Tomamos una partición P de $[a,b]$ tal que la longitud de los sub-intervalos de P es menor que δ. Hay dos clases de sub-intervalos de P;

A Sub-intervalos que contienen por lo menos un punto de T (En donde $f(x) = 0$)

B Sub-intervalos que contienen únicamente los puntos interiores de - $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$.

Entonces la suma superior de $f(x)$ con respecto a P;

$$U(P,f) = \Sigma_{A} M_k \cdot \Delta_k x + \Sigma_{B} M_h \cdot \Delta_h x \qquad (6)$$

(M_k, M_h son Sup $f(x)$ en sub-intervalos y $\Delta_k x$, $\Delta_h x$ son longitudes de sub-intervalos;)

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Sigma_{A} \Delta_k x + M \, \Sigma_B \Delta_h x \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) + M \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + M \, \overline{m} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + M\left(\overline{m}(S_o) + \frac{\varepsilon}{2M}\right)$$

$$= M \cdot \overline{m} \, (S_o) + \varepsilon$$

Por lo tanto se tiene:

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq U(P,f) \leq \varepsilon + M \cdot \overline{m}\,(S)$$

Como ε es cualquiera, el teorema queda demostrado.

NOTA En (5) y puede ser un punto de S_o, por lo tanto, en (6) -- $M_k = \sup f(x)$ (en el sub-intervalo de A) es menor que $\varepsilon/2(b-a)$.

REFERENCIA

1. The theory of functions of real variables: James Pierponto
2. Real functions: Casper Goffmann
3. The theory of function of a real variable : E. W. Hobson
4. Mathematical Analysis : T.M. Apostol
5. Topologie Generale II : N. Bourbaki
6. Análisis Matemático : Teiji Takagui