SOBRE LA EXISTENCIA DE UNA SOLUCION GLOBAL

Por

CARLOS LEMOINE

(Dpto. de Matemáticas U. N.)

Nº 0. Introducción

El objeto de esta nota es enunciar, demostrar y dar algunos ejemplos de aplicación de un teorema de existencia global que se deduce mas o menos inmediatamente del capítulo VIII del libro de Hörmander "Linear Partial Differential Operators".

Nº 1. Notaciones

Si α es un multíndice $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, D^α designará el signo de derivación

$$(-1)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

$P(x,D)$ denotará un operador de la forma

$$P(x,D)=\sum_{|\alpha|\le m} a^\alpha(x)D^\alpha$$

en donde $a^\alpha(x)$ es una función que toma sus valores en $\mathbb{C}$ y está definida en un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$

$$P_m(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m} a^\alpha(x)\,\xi^\alpha$$ será su parte homogénea de mayor grado.

$$\overline{P}_m(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m}\overline{a^\alpha(x)}\,\xi^\alpha$$ será el conjugado de $P_m(x,\xi)$

$$P_m^{(j)}(x,\xi)=\frac{\partial P_m(x,\xi)}{\partial\xi_j},\qquad P_{m,j}(x,\xi)=\frac{\partial P_m(x,\xi)}{\partial x_j}$$

$$C_{2m-1}=\sum_{j=1}^n i\left(P_m^{(j)}(x,\xi)\overline{P}_{m,j}(x,\xi)-P_{m,j}(x,\xi)\overline{P}_m^{(j)}(x,\xi)\right)$$

Es claro que C_{2m-1} es de grado $\leq m-1$ con coeficientes reales.(En efecto, $\frac{\partial}{\partial \xi} P_m(x,\xi)$ es de grado $\leq m-1$).

En general usaremos las notaciones de Schwartz [1] y Hörmander [2].

Nº 2. Definiciones y resultados necesarios

Definición 1[2]. Diremos que un operador $P(x,D)$ es principalmente normal en $\overline{\Omega}$ (Ω abierto de $\mathbb{R}_n$) si los coeficientes de P_m están en $C^1(\overline{\Omega})$ y existe un operador diferencial $Q_{m-1}(x,D)$ homogeneo de grado $m-1$ en D , con coeficientes en $C^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$C_{2m-1}(x,\xi) = 2\,\mathrm{Re}\, P_m(x,\xi)\,\overline{Q_{m-1}}(x,\xi)$$

Es bueno recordar en este punto que 0 es un polinomio de cualquier grado, por tanto si la parte homogenea principal de $P(x,D)$ es real o constante, en cuyo caso

$$P_m^{(j)}(x,\xi)\,\overline{P}_{m,j}(x,\xi) - P_{m,j}(x,\xi)\,\overline{P}_m^{(j)}(x,\xi) = 0$$

el operador es principalmente normal.

No es principalmente normal el operador de Lewy

$$-i\,D_1 + D_2 - 2(x_1 + i x_2)\,D_2 \qquad \text{porque}$$

$$C_1(x,\xi) = -8\,\xi_3 \quad y \quad 2\,\mathrm{Re}\,(P_m(x,\xi)) = 2\,\xi_2 - 4\,x_1\xi_3$$

$$y \qquad 2\,\mathrm{Im}(P_m,\xi) = -2\,\xi_1 - 2\,x_2\xi_2$$

por tanto no puede existir un operador de grado $m-1$(constante en ξ) tal que

$$C_1(x,\xi) = 2\,\mathrm{Re}\, P_m(x,\xi)\,P_0(x)$$

Definición 2[2]. Sea P un polinomio elíptico o principalmente normal. La superficie orientada

$$\psi(x) = \psi(x_0) \quad (\text{donde } \psi(x) \in C^2(\Omega) \quad y \quad \text{grad}\,\psi(x_0) \neq 0\ )$$

se llama seudoconvexa con respecto a P en el punto x si

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j\,\partial x_k} P_m^{(j)}(x,\xi)\,\overline{P}_m^{(k)}(x,\xi)$$

$$+\operatorname{Re}\sum_{j,k=1}^{n}\left(P_{m,k}^{(j)}(x,\xi)\overline{P}_m^{k}(x,\xi)-P_{m,k}(x,\xi)\overline{P_m^{(k,j)}}(x,\xi)\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}>0$$

para todo $\xi\neq 0$ en $\mathbb{R}_n$,que satisface a las ecuaciones

$$P_m(x,\xi)=0\ ,\qquad \sum_1^n P_m^{(j)}(x,\xi)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}=0$$

La superficie se llama fuertemente seudoconvexa con respecto a P en x si además

$$\sum_{j,k}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\,\partial x_k}P_m^{(j)}(x,\zeta)\overline{P_m^{(k)}}(x,\zeta)$$

$$+\,2^{-1}\mathfrak{I}_m\sum_1^n P_{m,k}(x,\zeta)\overline{P_m^{(k)}}(x,\zeta)>0$$

para todo $\zeta=\xi+i\tau\operatorname{grad}\psi(x)$ con $\xi\in\mathbb{R}_n$

y $0\neq\tau\in\mathbb{R}_1$ que satisface las condiciones

$$P_m(x,\zeta)=0\ ,\qquad \sum_1^n P_m^{(j)}(x,\zeta)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}=0$$

T-1-H . Sea $P(x,D)$ un operador diferencial de orden m con coeficientes medibles y acotados en una vecindad Ω de un punto x^0 ;asumamos , además,que P es principalmente normal,o que P_m es elíptico con C^1 coeficientes.Sea $\psi\in C^2(\Omega)$ tal que $\psi(x^0)\neq 0$ y que $\psi(x)=\psi(x_0)$ sea fuertemente seudoconvexa en x_0 con respecto a P ,entonces existe Ω_1 vecindad de x_0 tal que si $u\in\mathcal{H}_m^{loc}(\Omega)$ satisface a $P(x,D)u=0$ en

$$\{x;\ x\in\Omega\quad \psi(x)>\psi(x_0)\}$$

entonces $u=0$ en Ω_1

T-2-H . Si $P(x,D)$ es principalmente normal $\psi(x)\in C^2(\Omega)$ con superficies de nivel seudoconvexas.Asumamos,además,que ninguna de las ecuaciones diferenciales ${}^tP(x,D)u=0$ o $P(x,D)u=0$ tiene solución en $u\in\mathcal{E}(\overline{\Omega}')$.

Entonces existe una aplicacién lineal continua E de $L_2(\Omega')$ en $L_2(\Omega')$ tal que $P(x,D)Ef=f$ en Ω' si $f \in L_2(\Omega')$

$$E\,P(x,D)u=u \text{ en } \Omega' \text{ si } u \in C_0^\infty(\Omega')$$

además $D^\alpha E$ es acotado en $L_2(\Omega')$ si $|\alpha| < m$.

T-3-H . Si $P(x,D)$ es principalmente normal de orden m con coeficientes en $C^\infty(\Omega)$,y si $\psi(x) \in C^2(\Omega)$ tiene superficies seudoconvexas (Esto implica $\operatorname{grad} \psi(x) \neq 0$ en Ω) a través de Ω ; si $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ y

$$P(x,D)u = f \in \mathcal{H}_{(s)} \quad \text{entonces} \quad u \in \mathcal{H}_{(s+m-1)} .$$

T-4-H . Con las hipótesis del teorema anterior si $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ y

$$u \in \mathcal{H}_{(s)} \quad P(x,D)u \in \mathcal{H}_{(t)} \quad \text{si}$$

$$\chi \in C_0^\infty(R_n) \quad \int \chi\, dx = 1 \quad \chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\chi(x/\varepsilon)$$

entonces $u * \chi_\varepsilon \longrightarrow u$ en $\mathcal{H}_{(s)}$ y

$$P(x,D)(u * \chi_\varepsilon) \longrightarrow P(x,D)u \quad \text{en } \mathcal{H}_{(t)}$$

T-5-H . Con las hipótesis del teorema anterior

$$v \in \mathcal{H}^{loc}_{(s)}(\Omega) \quad {}^tP(x,D)v \in \mathcal{H}^{loc}_{(t)}(\Omega)$$

implica que existe una sucesión $v_\nu \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$v_\nu \to v \text{ en } \mathcal{H}^{loc}_s(\Omega) \quad y \quad {}^tP(x,D)v_\nu \to {}^tP(x,D)v \text{ en } \mathcal{H}^{loc}_t(\Omega)$$

Estos teoremas se encuentran en [2] .

T-B.D , Sea E, E' espacios de Frechet. $u\; E \longrightarrow E_1$,continuo , es un homomorfismo sobre si y solo si

i) ${}^tu E'$ en E_1' es inyectiva.

ii) La intersección de $({}^tu(E_1')) \cap B$ es débilmente cerrado, donde B es un conjunto cerrado convexo y débilmente cerrado de E'.

Se encuentra en [3] .

§1. Espacios locales y semilocales

Definición 1 [2]. Si $\mathcal{H}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{D}'(\Omega)$ se llama semilocal si $\varphi u \in \mathcal{H}$ cuando $u \in \mathcal{H}$ y $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ (funciones indefinidamente derivables con soporte compacto).

Decimos que $\mathcal{H}$ es local si $\mathcal{H}$ es semilocal y, además, $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal $\varphi u \in \mathcal{H}$, para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se tenga $u \in \mathcal{H}$.

Nota 1. Dado un espacio semilocal $\mathcal{H}$, el menor espacio local que contiene a $\mathcal{H}$ es $\mathcal{H}^c = \{u \mid \varphi u \in \mathcal{H},\ \forall \varphi \in C_0^\infty\}$ [2]

Dado un espacio semilocal $\mathcal{H}$ con una topología definida por una familia de seminormas P_i, es natural considerar sobre $\mathcal{H}^c$ (El menor espacio local que contiene a $\mathcal{H}$) una topología por medio de las seminormas $P_{i,\varphi}\, u \longrightarrow P_i(\varphi u)$ donde $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

A continuación mostraremos algunas propiedades elementales de estos espacios.

Proposición 1. Si $\mathcal{H}$ es semilocal y está dotado de una topología que lo haga un espacio localmente convexo completo entonces $\mathcal{H}^{loc}$, con la topología definida anteriormente es un espacio localmente convexo completo.

Sea $\mathcal{B}$ una base de filtro de Cauchy para la topología $\mathcal{H}^{loc}$; esto es equivalente a decir que $\varphi\mathcal{B}$ es una base de filtro de Cauchy sobre $\mathcal{H}$, $(\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega))$ como este espacio es completo, para cada $\varphi\mathcal{B}$ existe una distribución φU, límite del filtro de Cauchy engendrado por $\varphi\mathcal{B}$. Tomemos en particular una partición de la unidad φ_i con soportes compactos, entonces la familia $\lim \varphi_i \mathcal{B}$ es sumable, además satisface su suma a la condición 2, y para todo φ

$$\lim \varphi\mathcal{B} = \lim \varphi \sum_i \lim_{\mathcal{B}} (\varphi_i \mathcal{B})$$

lo que prueba nuestra proposición.

Proposición 2. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Frechet tal que la multiplicación por un elemento arbitrario $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ es continua, entonces $\mathcal{H}^{loc}$ es un espacio de Frechet.

Demostración:

Sea K_ν una sucesión de compactos tales que

i) $K_\nu \subset \mathring{K}_{\nu+1}$

ii) $\bigcup_{\nu \geq 0} K_\nu = \Omega$

Sea φ_ν con las propiedades siguientes:

$$\varphi_\nu = 1 \quad en \; K_\nu \quad , \qquad \varphi_\nu = 0 \quad en \quad \complement K_{\nu+1}$$

Sean P_n las seminormas que definen la topología de $\mathcal{H}$. Mostremos que las seminormas $P_n \varphi_\nu$ definen la topología de $\mathcal{H}_1^{loc}$

En efecto, para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ existe un ν tal que se tenga

$$P_{n\varphi}(u) = P_n(\varphi u) = P_n(\varphi_\nu \varphi u) = P_n(\varphi \varphi_\nu u) \leq K P_n(\varphi_\nu u) = K P_{n\varphi_\nu}(u)$$

en donde la desigualdad se deduce de la continuidad de la multiplicación por un elemento $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Esto muestra que es metrizable; como la completez se deduce de la proposición anterior la demostración es completa.

Proposición 3. Sea $C_0^\infty \subset \mathcal{H}$ semilocal con una topología localmente convexa separada, tal que la multiplicación por los elementos de C_0^∞ sea continua y su dual esté contenido en D' (la restricción a $C_0^\infty(\Omega)$ es una distribución); $\mathcal{H}^{loc}$ el más pequeño espacio local que lo contiene, con su topología natural. Para que una forma lineal u sobre $\mathcal{H}^{loc}$ sea continua es necesario y suficiente que

i) u restringido a $\mathcal{H}$ sea continua para la topología de $\mathcal{H}$

ii) El soporte de u sea compacto.

Demostración :

a) La condición es necesaria.

Si u es continua y φ_ν tiende a cero en $\mathcal{H}$, $\varphi\varphi_\nu$ tiende a cero en $\mathcal{H}$

luego φ_ν tiende a cero en $\mathcal{H}^{loc}$ y por tanto $u(\varphi_\nu)$ tiende a cero, por tanto u restringida a $\mathcal{H}$ es continua.

Si u no tiene soporte compacto podemos tomar una sucesión K_ν de compactos tales que

i) $K_\nu \subset \mathring{K}_{\nu+1}$

ii) $\bigcup K_\nu = \Omega$

$x_\nu \in K_\nu$ y $x \notin K_{\nu+1}$, una sucesión de funciones φ_ν con soporte contenido en $\mathring{K}_{\nu+1} - K_\nu$ y tales que $u(\varphi_\nu) \neq 0$, luego la sucesión

$$\frac{\varphi_\nu}{u(\varphi_\nu)} \quad \text{tiende a cero en } \mathcal{H}^{loc}$$

puesto que dada una seminorma $P_{\varphi,n}$, existe un ν tal que

$\operatorname{supp}\varphi_\nu \cap \operatorname{supp}\varphi = \phi$ y por tanto $P_n(\varphi\varphi_\nu) = 0$, pero la sucesión

$u\left(\frac{\varphi_\nu}{u(\varphi_\nu)}\right) = 1$ no tiende a cero.

La recíproca es immediata.

Si u tiene soporte compacto y $u \in \mathcal{H}'$ supongamos que los φ_ν tienden a cero en $\mathcal{H}^{loc}$, entonces si $C_0^\infty \ni \varphi = 1$ en $\operatorname{supp} u$, $u(\varphi\varphi_\nu) = u(\varphi_\nu)$ tiende a cero.

<u>Proposición 4.</u> Si $\mathcal{H}^{loc}$ es tonelado, un conjunto débilmente acotado en $(\mathcal{H}^{loc})'$ tiene sus soportes contenidos en un compacto fijo K.

<u>Demostración:</u>

Si K es débilmente acotado, su polar es una vecindad de 0 en $\mathcal{H}^{loc}$, luego existe una φ, y un P tal que se tenga $\lambda P_n(\varphi u) \geq \sup_h |\langle h, u\rangle|$ para todo u que pertenezca a $\mathcal{H}^{loc}$ de donde se deduce la proposición al reemplazar a u por una distribución con soporte contenido en el complementario del soporte de φ.

§ 2. Un teorema de existencia en $\mathcal{D}\mathcal{L}_2^{loc}(\Omega)$

Como el espacio de las funciones indefinidamente derivables que pertenecen con sus derivadas a $L_2(\Omega)$ dotado de la topología de la norma en la función y sus derivadas es un espacio semilocal de Frechet, podemos aplicar a este espacio los resultados del parágrafo anterior.

$\mathcal{D}_2^{loc}(\Omega) = \bigcap_{s\geq 0} H_s^{loc}$, además es claro que un conjunto acotado en $(\mathcal{D}_2^{loc}\mathcal{L}(\Omega))'$ tiene su soporte contenido en un compacto fijo y todo pertenecen a $H^{(-s)}$ fijo. (Para mostrar esta parte de la afirmación basta repetir el razonamiento de la proposición 4)

Lema 1. Sea $P(x,D)$ un operador principalmente normal en Ω , con coeficientes en $C^2(\Omega)$, sea $\psi \in C^2(\Omega)$ tal que sus superficies de nivel sean fuertemente seudoconvexas, entonces la aplicación $\mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}'$

$u \longrightarrow P(x,D)u$ es inyectiva.

Demostración:

Sea u tal que $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ y $P(x,D)u = 0$, sea $K = \operatorname{supp} u$, mostremos que K es vacío. En efecto, sea $x_0 \mid x_0 \in K$ y $\max_{x\in K} \psi(x) = \psi(x_0)$ entonces $u = 0$ en $\{x \mid \psi(x) > \psi(x_0)\}$ y puesto que $u \in \mathcal{E}'$ pertenece a algún $\mathcal{H}_m^{loc}(\Omega)$, por tanto existe una vecindad Ω_1 de x_0 en que $u = 0$, (T-1-H) esto va contra la hipótesis $x_0 \in \operatorname{supp} u$.

Proposición 1. Si los coeficientes $a^\alpha(x)$ de $P(x,D)$ son tales que la aplicación $\varphi \longrightarrow a^\alpha(x)\varphi$ es continua de $\mathcal{D}\mathcal{L}^{loc}(\Omega)$ en $\mathcal{D}\mathcal{L}^{loc}(\Omega)$ entonces el operador $P(x,D)$ es continuo.

Demostración:

Inmediata.

Teorema 1. Si los coeficientes de un operador principalmente normal $P(x,D)$ satisfacen las condiciones de la proposición 1 ; si $\psi(x) \in C^2(\Omega)$ tiene superficies de nivel fuertemente seudoconvexas con respecto a P

y si Ω es P -convexo, entonces, para todo $f \in \mathcal{D}^2 L_2^{loc}(\Omega)$ existe un $u \in \mathcal{D} L_2^{loc}(\Omega)$ tal que $P(x,D)u = f$ en todo Ω.

Para demostrar la proposición es suficiente mostrar que

$$\mathcal{D} L_2^{loc}(\Omega) \xrightarrow{{}^tP(x,D)} (\mathcal{D} L_2^{loc}(\Omega))'$$

satisface las siguientes condiciones:

(i) Es inyectiva.

(ii) Para todo compacto K y para todo m la intersección ${}^tP(x,D)(\mathcal{D} L_2^{loc}(\Omega))' \cap H_{-m}(K)$ ($H_{-m}(K)$ designa las distribuciones que pertenecen a H_{-m} y tienen soporte en K) es un compacto débilmente cerrado.

(i) es consecuencia del lema 1.

Mostremos (ii)

Para demostrar emplearemos el siguiente :

Lema 2. Si E satisface las condiciones del teorema 2-H y Ω' es P-convexo, la imágen $E\varphi$ de una función $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$ es una función de $C_0^\infty(\Omega')$

Supongamos que $E\varphi$ no tiene soporte compacto, $E\varphi \in L_2^{loc}(\Omega')$ y ${}^tP(x,D)\varphi \in L_2^{loc}(\Omega')$ luego existe una suceción de funciones V_ν que tienden en $L_2^{loc}(\Omega')$ hacia $E\varphi$ y tales que ${}^tP(x,D)V_\nu$ tiende a φ en $L_2^{loc}(\Omega)$, además los $V_\nu \in C_0^\infty(\Omega)$. (Teorema 4-H)

Es claro que los V_ν no pueden tener su soporte contenido en un compacto K' fijo. Ahora bien, los ${}^tP(x,D)V_\nu$ tienden hacia ${}^tP(x,D)E\varphi = \varphi$ por tanto deben tener, de un cierto ν_0 en adelante, todos sus soportes contenidos en un compacto fijo K , y como Ω' es P -convexo nuestra aserción queda demostrada.

Una vez demostrada ésta hipótesis es fácil ver que $E\varphi$ es indefinidamente derivable. En efecto, ${}^tP(x,D)E\varphi = \varphi \in \mathcal{H}^{(s)}$ para todo S , luego $E\varphi \in \mathcal{H}^{(s+m-1)}$ para todo S , lo que implica que es indefinidamente derivable.

Lema 3. Con la hipótesis del lema anterior ${}^tE\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$ si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$.

Podemos utilizar el mismo razonamiento del lema anterior teniendo en cuenta la igualdad

$$< {}^tP(x,D)\,{}^tE,\ \varphi\ ,\ u > \;=\; <\varphi\ ,\ EP(x,D)u> \;=\; <\varphi, u>$$

$$\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega') \qquad \forall\, u \in L_2(\Omega')$$

Sea ahora $\mu_k \in D_2^{loc}(\Omega)'$ tales que ${}^tP(x,D)\mu_k \to \sigma$ débilmente, y sea $\{{}^tP(x,D)\mu_k\}$ acotado, mostremos que los μ_k son débilmente convergentes.

$\{{}^tP(x,D)\mu_k\}$ es acotado equivale a decir, según lo anotado al comienzo de éste parágrafo, que ${}^tP(x,D)\mu_k$ tienen un compacto fijo K como soporte, y que todos pertenecen a un H^{-m} y tienden en él a σ fijo; según el teorema 3-H y la P-convexidad de Ω podemos suponer que los μ_k tienen también como soporte común en K' y pertenecen a un H^{-t} fijo; según el teorema 5-H

$$\mu_j * \varphi_{1/n} \quad (\ \varphi \geqslant 0\ ,\ \int \varphi\, dx = 1,\ \varphi \in C_0^\infty,\ \operatorname{supp}\varphi \subset \{x \mid |x| \leq 1\}$$

converga hacia μ_j y los ${}^tP(x,D)(\mu_j * \varphi_{1/n})$ hacia $\mu_j * \varphi_{1/n}$, es claro que podemos entonces extraer una subsucesión $\mu_j * \varphi_{1/n_j}$ tal que ${}^tP(x,D)\mu_j * \varphi_{1/n_j}$ converge hacia σ.

Tomemos ahora $\Omega' \Subset \Omega$ un abierto P-convexo que contiene a K'.

Sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$, entonces tendremos, siendo E como en el teorema 2-H, en virtud de los lemas 2 y 3

$$<\mu_j * \psi_{1/n_j}\ ,\ \varphi> = <{}^tE\,{}^tP(x,D)\mu_j * \psi,\ \varphi> = <{}^tP(x,D)\mu_j * \psi_j\ ,\ E\varphi>$$

lo que demuestra que la sucesión $\mu_j * \psi_{1/n_j}$ es débilmente convergente en un conjunto denso luego en todo $\mathcal{D}L_2(\Omega')$.

Esto termina la demostración del teorema.

Las hipótesis del teorema se satisfacen por ejemplo en cualquier conjunto del cuadrante positivo, por el operador de Tricomi $x_1 D_{x_2} - x_2 D_{x_1}$.

Referencias:

[1] Theorie des distributions. Laurent Schwartz París 1950 - 1951

[2] Linear Partial Differential Operators. L. Hörmander. Academie Press. New York 1963.

[3] Existence et aproximation des solutions des équations aux deriveés partielles et des équations de convolution. Malgrange B. Ann Institute Fourier. Grenoble. Número 6, páginas 271 a 353. (1955-1956).

(Recibido en Julio de 1965)