UNA FORMULA APROXIMADA DE $F(-b,1,x)$ PARA b RELATIVAMENTE GRANDE.

Por:

YU TAKEUCHI

§1 Introducción.

Para calcular los valores de la función hipergeométrica confluente, $F(-b,1,x)$, cuando $|x|$ es grande, se utiliza generalmente el conocido desarrollo asintótico de la función;[1,3]

$$F(-b,1,x)=\frac{(-x)^b}{\Gamma(b+1)}\left\{1-\frac{b^2}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\}+\frac{e^x x^{-b-1}}{\Gamma(-b)}\left\{1+\frac{(b+1)^2}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\} \cdots (1)$$

Esta formula (1) no es adecuada si $|b|$ es muy grande ya que los corchetes contienen b^2/x . En este artículo se estudia una fórmula aproximada de $F(-b,1,x)$ para $|b^2/x| \gtrsim 1$.[2]

§2 Expresión integral de $F(-b,1,x)$.

La función $F(-b,1,x)$ es una solución de la ecuación hipergeo - métrica confluente;[4,3]

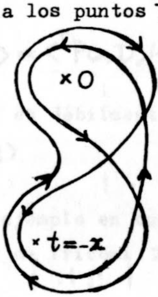
$$x y'' + (1-x) y' + b y = 0 \qquad \cdots (2)$$

Utilizando la integral de contorno en el plano complejo t se obtiene;

$$F(-b,1,x)=\frac{-(-x)^b}{4\pi \operatorname{sen} \pi b}\oint_C t^{-b-1}\left(1+\frac{t}{x}\right)^b e^{-t}\,dt \qquad \cdots (3)$$

donde C es un doble contorno que circula los puntos $t=0$ y $t=-x$. (Ver Figura 1)[5]

Deformando el contorno C y separándolo en dos partes C_1, C_2 como en la figura 2, se obtiene la siguiente relación.



plano-t

Fig. 1

$$F(-b,1,x) = \Phi_1(-b,1,x) + \Phi_2(-b,1,x) \qquad \cdots \quad (4)$$

donde

$$\Phi_1(-b,1,x) = \frac{e^{\pi i b}(-x)^b}{2\pi i} \oint_{C_1} t^{-b-1}\left(1+\frac{t}{x}\right)^b e^{-t}\, dt \qquad \cdots \quad (5)$$

$$\Phi_2(-b,1,x) = \frac{e^{-\pi i b}(-x)^b}{2\pi i} \oint_{C_2} t^{-b-1}\left(1+\frac{t}{x}\right)^b e^{-t}\, dt \qquad \cdots \quad (6)$$

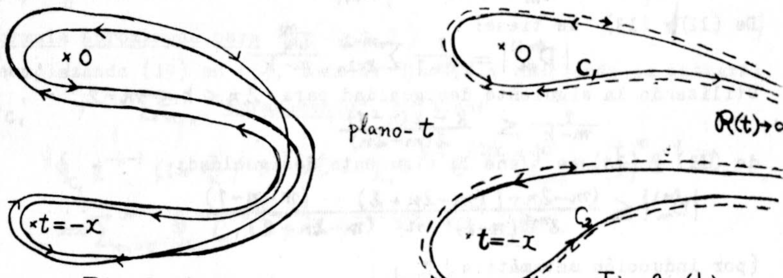


Fig 2. (a) Fig.2 (b)

Reemplazando el desarrollo binomial de $(1+t/x)^b$ en (5) y (6) se obtiene la formula (1), pero en este artículo se va a utilizar otro desarrollo de $(1+t/x)^b$.

§3 La expansión de $(1+y)^b$.

Sea

$$\{(1+y)e^{-y}\}^b = \sum_{m=0}^{\infty} a_m y^m \qquad \cdots \quad (7)$$

entonces la serie converge para $|y| < 1$. La función (7) , considerandola como una función analítica de b , se puede desarrollar en la siguiente forma;

$$\{(1+y)e^{-y}\}^b = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y) \cdot b^n \qquad \cdots \quad (8)$$

donde

$$f_n(y) = \frac{1}{n!}\{\log(1+y) - y\}^n$$

$$= \frac{1}{n!}\left\{-\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \cdots (-1)^{k-1}\frac{y^k}{k} + \cdots\right\}^n = \sum_{m=0}^{\infty} D_m^{(n)} y^m \qquad (9)$$

Entonces se obtienen;

$$D_m^{(n)} = 0 \qquad \text{si} \qquad m < 2n \qquad \cdots \quad (10)$$

$$D_m^{(1)} = (-1)^{m-1}\frac{1}{m} \qquad (m \geq 2) \qquad \cdots \quad (11)$$

También se tiene;

$$\sum_{m=0}^{\infty} D_m^{(n+1)} y^m = \frac{1}{n+1}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} D_m^{(n)} y^m\right\}\left\{-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\right\}$$

entonces:

$$D_m^{(n+1)} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=2n}^{m-2}(-1)^{m-k-1}\frac{D_k^{(n)}}{m-k} \quad \cdots \quad (12)$$

De (11) y (12) se obtiene

$$D_m^{(n)} = (-1)^{m-n}\left|D_m^{(n)}\right| \quad \cdots \quad (13)$$

De (12) y (13) se tiene:

$$\left|D_m^{(n+1)}\right| = \frac{1}{n+1}\sum_{k=2n}^{m-2}\frac{D_k^{(n)}}{m-k} \quad \cdots \quad (14)$$

Utilizando la siguiente desigualdad para $2n \leq k \leq m-2$;

$$\frac{1}{m-k} \leq \frac{k-2(n-1)}{2(m-2n)}$$

de (11) y (14) se tiene la siguiente desigualdad:

$$\left|D_m^{(n)}\right| \leq \frac{(m-2n+1)(m-2n+2)\cdots(m-n-1)}{2^{n-1}(n-1)!\; n!\; (m-2n+2)} \quad \cdots \quad (15)$$

(por inducción matemática !)

De (15), es facil demostrar las siguientes desigualdades:

$$\left|D_m^{(n)}\right| \left.\begin{array}{ll} \leq \binom{m/2}{n}\dfrac{2}{m(m-2)} & \text{si } m \text{ es par} \\ \leq \binom{\frac{m-1}{2}}{n}\dfrac{2}{(m-1)(m-3)} & \text{si } m \text{ es impar} \end{array}\right\} \cdots \quad (16)$$

Ahora, de (8) se tiene:

$$\left((1+y)e^{-y}\right)^b = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=2n}^{\infty} D_m^{(n)} y^m\right) b^n$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{m/2 \text{ o } \frac{m-1}{2}} D_m^{(n)} b^n\right\} y^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m y^m \quad \cdots \quad (17)$$

Por lo tanto, utilizando (16) se obtiene:

$$|a_m| \leq \sum_{n=0}^{m/2 \text{ o } \frac{m-1}{2}}\left|D_m^{(n)} b^n\right| \left.\begin{array}{ll} \leq \dfrac{2}{m(m-2)}\{1+|b|\}^{m/2} & (m=\text{par}) \\ \leq \dfrac{2}{(m-1)(m-3)}\{1+|b|\}^{\frac{m-1}{2}} & (m=\text{impar}) \end{array}\right\} \cdots \quad (18)$$

<u>Nota</u> De (18), es facil demostrar que la serie reiterada;

$$\sum_m\left(\sum_n \left|D_m^{(n)}\right| |b|^n\right)|y|^m$$

converge, la cual justifica el cambio de la sigma en (17);

$$\sum_m \sum_n = \sum_n \sum_m$$

Así, obtenemos la siguiente expansión de $(1+y)^b$;

$$(1+y)^b = e^{by} \sum_{m=0}^{\infty} a_m y^m \qquad \cdots \quad (19)$$

Los primeros coeficientes son;

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 1 \ , \quad a_1 = 0 \ , \quad a_2 = -\frac{1}{2} b \ , \quad a_3 = \frac{1}{3} b \\ a_4 = \frac{1}{8} b(b-2) \end{array}\right\} \cdots \quad (20)$$

§4 Formula aproximada para $\Phi_1(-b,1,x)$

Reemplazando (19) en (5), tomando $y = t/x$ y cambiando la integral $\oint_{C_1}$ y $\sum_{m=0}^{\infty}$ "Formalmente", se tiene

$$\oint_{C_1} t^{-b-1} (1+\tfrac{t}{x})^b e^{-t} dt = \oint_{C_1} t^{-b-1} e^{bt/x} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\tfrac{t}{x}\right)^m e^{-t} dt$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \oint_{C_1} e^{-t(1-b/x)} t^{-b-1+m} dt \ \frac{a_m}{x^m}$$

$$= 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{-b+m}}{(1-b/x)^{-b+m}\, \Gamma(b+1-m)} \frac{a_m}{x^m} \qquad \cdots \quad (21)$$

$$= \frac{2\pi i (-1)^b}{\Gamma(b+1)} (1-\tfrac{b}{x})^b \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m b(b-1)\cdots(b-m+1) \frac{a_m}{(x-b)^m} \right\} \cdots (22)$$

En (21) se ha utilizado la expresion integral de la función Gama:

$$\oint_{C_1} e^{-t\lambda} t^{s-1} dt = \frac{2\pi i (-1)^s}{\lambda^s \Gamma(-s+1)} \qquad \cdots \quad (23)$$

Justificación de la Formula (22).

Evidentemente el cambio de orden de la integral $\oint_{C_1}$ y $\sum_m$ no es admitible ya que el contorno C_1 extiende hacia infinito ($\mathrm{R}t \to \infty$) y la serie converge cuando $|t/x| < 1$, por lo tanto la formula (22) debe ser justificada por otro método.

Para este objeto, deformando el contorno C_1 como en la figura 3, dividimos C_1 en tres partes, entonces:[5]

$$\oint_{C_1} = \int_{\infty \atop \text{Real}}^{\delta} + \oint_{\delta \to \delta} + \int_{\delta \atop \text{Real}}^{\infty} \quad \cdot \ (24)$$

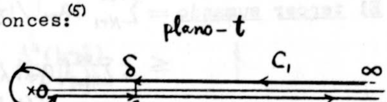


Fig. 3

Como el origen es un punto de

rama de las funciones t^{-b-1} y t^{-b-1+m},
entonces se obtiene:

$$\int_{\substack{\infty\\ Real}}^{\delta} + \int_{\substack{\delta\\ Real}}^{\infty} = (e^{-2\pi i b}-1)\int_{\substack{\delta\\ Real}}^{\infty} \qquad \cdots \qquad (25)$$

Sea

$$\left(1+\frac{t}{x}\right)^{b} = e^{bt/x}\left\{\sum_{m=0}^{N} a_m\left(\frac{t}{x}\right)^{m} + S(t)\right\} \qquad \cdots \qquad (26)$$

donde . $N = [b] =$ parte entera de b,

entonces
$$S(t) = (1+t/x)^{b}\, e^{-bt/x} - \sum_{m=1}^{N} a_m (t/x)^{m} \qquad \cdots \qquad (27)$$

$$S(t) = \sum_{m=N+1}^{\infty} a_m\left(\frac{t}{x}\right)^{m} \text{ cuando } |t| < |x| \qquad \cdots \qquad (28)$$

Tomando δ menor que $|x|$, se obtiene

$$\left|\oint_{C_1} t^{-b-1} e^{-t} e^{bt/x} S(t)\,dt\right| \le \left|(e^{-2\pi i b}-1)\int_{\delta}^{\infty}\right| + \left|\oint_{\delta\to\delta}\right|$$

$$\le 2\left|\int_{\delta}^{\infty}\left\{e^{-t}t^{-b-1}(1+t/x)^{b} - e^{-t(1-b/x)}t^{-b-1}\sum_{m=1}^{N} a_m\left(\frac{t}{x}\right)^{m}\right\}dt\right|$$

$$+\left|\oint_{\delta\to\delta} t^{-b-1}e^{-t(1-b/x)}\sum_{m=N+1}^{\infty} a_m (t/x)^{m}\,dt\right|$$

$$\le 2\int_{\delta}^{\infty} e^{-t}t^{-b-1}\left(1+\frac{t}{|x|}\right)^{b}dt + 2\sum_{1}^{N}\left\{\int_{\delta}^{\infty} e^{-t(1-b/|x|)}t^{-b-1+m}\,dt\right\}\frac{|a_m|}{|x|^{m}}$$

$$+\sum_{N+1}^{\infty}\frac{|a_m|}{|x|^{m}}\left|\oint_{\delta\to\delta} t^{m-b-1}e^{-t(1-b/x)}\,dt\right| \qquad \cdots \qquad (29)$$

<u>El primer sumando</u> $\le 2\int_{\delta}^{\infty} e^{-t}\,\delta^{-b-1}(1+\delta/|x|)^{b}\,dt$

$$= 2(e^{-\delta}/\delta^{b+1})(1+\delta/|x|)^{b} = \Delta_1 \qquad \cdots \qquad (30)$$

<u>El segundo sumando</u> $\le 2\sum_{1}^{N}(|a_m|/|x|^{m})\cdot\delta^{-b-1+m}\int_{\delta}^{\infty} e^{-t(1-b/|x|)}\,dt$

$$= 2\frac{e^{-\delta(1-b/|x|)}}{(1-b/|x|)\delta^{b+1}}\sum_{1}^{N}|a_m|\left(\frac{\delta}{|x|}\right)^{m}$$

$$\sim \Delta_1\sum_{1}^{N}|a_m|(\delta/|x|)^{m} = \Delta_2 \qquad \cdots \qquad (31)$$

(<u>Nota</u>: Siempre se supone que $b \ll |x|$.)

<u>El tercer sumando</u> $= \sum_{N+1}^{\infty}|a_m|/|x|^{m}\cdot\left|(e^{-2\pi i b}-1)\int_{0}^{\delta} t^{m-b-1}e^{-t(1-b/|x|)}\,dt\right|$

$$\le 2\sum_{N+1}^{\infty}(|a_m|/|x|^{m})\,\delta^{m-b-1}\int_{0}^{\delta} e^{-t(1-b/|x|)}\,dt$$

$$= 2\cdot\frac{1-e^{-\delta(1-b/|x|)}}{(1-b/|x|)\cdot\delta^{b+1}}\sum_{N+1}^{\infty}|a_m|\left(\frac{\delta}{|x|}\right)^{m} = \Delta_3 \qquad \cdots \qquad (32)$$

Tomando
$$\delta \sim \frac{|x|}{\sqrt{b}}$$

para garantizar la convergencia de la serie en (32), (observese (18)), entonces;

$$\Delta_1 \sim \Delta_2 \sim \Delta_3 \sim \frac{1}{\delta^{b+1}} \sim \left|\frac{\sqrt{b}}{x}\right|^{b+1} \qquad (33)$$

Si (33) es mucho más pequeño que el primer termino de (22);

$$(1-b/x)^b \,/\, \Gamma(b+1) \qquad (34)$$

entonces el error de la formula (22) es despreciable.

De (5) y (22) se obtiene

$$\Phi_1(-b,1,x) = \frac{(-x)^b}{\Gamma(b+1)}\left(1-\frac{b}{x}\right)^b \left\{1+\sum_1^N (-1)^m b(b-1)\cdots(b-m+1)\frac{a_m}{(x-b)^m}\right\}$$

$$= \frac{(-x)^b}{\Gamma(b+1)}\left(1-\frac{b}{x}\right)^b \left\{1-\frac{1}{2}\frac{b^2(b-1)}{(x-b)^2}-\frac{1}{3}\frac{b^2(b-1)(b-2)}{(x-b)^3} + \frac{1}{8}\frac{b(b-2)b(b-1)(b-2)}{(x-b)^4}+\cdots\right\} \qquad (35)$$

§5 Formula aproximada para $\Phi_2(-b,1,x)$

En (6), haciendo el cambio de variable

$$t + x = y \qquad (t\to y)$$

se tiene;

$$\Phi_2(-b,1,x) = \frac{-e^{-\pi i b}}{2\pi i} e^x x^{-b-1} \oint_{C_1}\left(1-\frac{y}{x}\right)^{-b-1} y^b e^{-y}\, dy \qquad (36)$$

Aplicando la expansion de $(1-y/x)^{-b-1}$ discutida en § 3., se obtiene:

$$\Phi_2(-b,1,x) = \frac{-e^{-\pi i b}}{2\pi i} e^x x^{-b-1} \sum_0 \frac{a_m}{(-x)^m}\oint_{C_1} y^{m+b} e^{-y\left(1-\frac{b+1}{x}\right)}\, dy$$

$$= \frac{e^x}{\Gamma(-b)}(x-b-1)^{-b-1}\left\{1+\sum_{m=1}\frac{(-b-1)(-b-2)\cdots(-b-m)\,a_m}{(x-b-1)^m}\right\}$$

$$= \frac{e^x}{\Gamma(-b)}(x-b-1)^{-b-1}\left\{1-\frac{b(b+1)(b+2)}{2\cdot(x-b-1)^2}-\frac{b(b+1)(b+2)(b+3)}{3\cdot(x-b-1)^3}\cdots\right\} \qquad (37)$$

De (35) y (37) obtenemos;

$$F(-b,1,x) = \frac{(-x)^b}{\Gamma(b+1)}\left(1-\frac{b}{x}\right)^b\left\{1-\frac{1}{2}\frac{b^2(b-1)}{(x-b)^2}-\cdots\right\}$$

$$+\frac{e^x}{\Gamma(-b)(x-b-1)^{b+1}}\left\{1-\frac{b(b+1)(b+2)}{2\cdot(x-b-1)^2}-\cdots\right\} \qquad (38)$$

R E F E R E N C I A S

1) Erdelyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi;
Higher Transcendental function. Vol 1.

2) Yu Takeuchi;
Propagación de Una Onda Térmica, Revista de Matemáticas Elementales, Vol. 5 Fascículo 4.

3) Wittaker and Watson;
Modern Analysis.

4) E.L. Ince;
Ordinary Differential Equations.

5) Macrobert;
Functions of a Complex Variable.

(Recibido en julio de 1965)