SOBRE UN TEOREMA DE CONVERGENCIA DE UN FILTRO

Por
JAIRO CHARRIS C.
(Dpto. de Matematicas, U. N.)

El objeto de este pequeno articulo es proponer una generalización de un teorema bien conocido del analisis. La generalización en un cierto modo obvia pero de algún interes y puede ser, de alguna aplicación . El teorema del cual partimos se encuentra en Bourbaki (1) y afirma:

TEOREMA 1

Sea X un espacio uniforme, $\mathcal{B}$ una base de filtro sobre X, $a \in X$ y $\mathcal{G}$ un filtro sobre X mas fina que el filtro $\mathcal{F}$ de base $\mathcal{B}$. En esas condiciones, para que $\mathcal{F}$ converja hacia a, es necesario y suficiente:

α) $\mathcal{B}$ sea una base de filtro de Cauchy.

β) $\mathcal{G}$ converja hacia a .

Ahora bien, examinemos separadamente varios hechos en el teorema anterior.

1. Para la relación de orden $\leqslant$ definida sobre $\mathcal{B}$ por la relación de inclusión ($A \leqslant B$ quiere decir $A \subseteq B$) se tiene las siguientes propiedades.

(I) Si $A, B \in \mathcal{B}$, existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \leqslant A$ y $C \leqslant B$.

(II) $\mathcal{B} \neq \phi$ y $\phi \notin \mathcal{B}$

2. Del hecho de ser $\mathcal{G}$ mas fina que $\mathcal{F}$ se tiene:

(III) Para todo $A \in \mathcal{G}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $A \cap C \neq \phi$ para todo $C \leqslant B$, $C \in \mathcal{B}$

Naturalmente la propiedad (III) puede anunciarse de una manera mucho mas fuerte, en verdad, tal proposición vale para todo $B \in \mathcal{B}$.

La enunciamos de esta manera por motivos obvios más adelante.

3. Por ser $\mathcal{B}$ una base de filtro de Cauchy y $\leq$ la relación de inclusión, podemos afirmar:

(IV) Si W es un entorno de la estructura uniforme de X, existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $B \times B \subseteq W$ para todo $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \leq A$.

Basandonos en estos hechos vamos en lo que sigue a proponer una generalización del teorema 1.

Consideremos un espacio uniforme X y $\mathcal{B}$ un conjunto de partes de X ordenado por una relación $\leq$ (no necesariamente la relación de inclusión) y tal que las propiedades (I) y (II) anteriores se verifiquen. Si $A \in \mathcal{B}$ notaremos S_A al conjunto $\{B \in \mathcal{B} \mid B \leq A\}$. Claramente $S_A \subseteq \mathcal{B}$. Sea ahora $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid F \supseteq \bigcup_{B \in S_A} B$ para algún $A \in \mathcal{B}\}$. Obviamente $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X. Sea ahora $\mathcal{G}$ un filtro de X más fino que $\mathcal{F}$ y tal que la propiedad (III) se satisfaga. Enunciemos

TEOREMA 2

Para que el filtro $\mathcal{F}$ converja hacia un punto $a \in X$ es necesario y suficiente :

α') $\mathcal{B}$ satisfaga (IV).

β') $\mathcal{G}$ converja hacia a.

DEMOSTRACION

Si $\mathcal{F}$ converge hacia a, tambien $\mathcal{G}$ por ser mas fino. Como $\mathcal{F}$ es convergente, es un filtro de Cauchy. Si W es un entorno de X existe entonces $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \times F \subseteq W$ (Recordemos que designando por $\mathcal{W}(X)$ el filtro de entornos de X, la condición de Cauchy sobre $\mathcal{F}$ es equivalente a : $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ es más fino que $\mathcal{W}(X)$). Sea $A \in \mathcal{B}$ tal que $\bigcup_{B \in S_A} B \subseteq F$. Es claro que $B \times B \subseteq W$ para todo $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \leq A$. Esto demuestra que (α') y (β') son necesarios.

Demostremos ahora que las condiciones son suficientes, es decir que $\mathcal{F}$ es más fino que $\mathcal{B}(a)$ ($\mathcal{B}(a)$ es el filtro de las vecindades de a en X) suponiendo (α') y (β'). Sea entonces $V \in \mathcal{W}(X)$ y $W \in \mathcal{W}(X)$ simétrico y tal que $\overset{2}{W} \subseteq V$. Sea $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \subseteq W(a)$. Consideremos $A, B \in \mathcal{B}$ tales que $M \cap G \neq \phi$ para todo $M \leq A$ y $N \times N \subseteq W$ para todo $N \leq B$. A existe por razon de (III) y B por razon de (β'). Sea $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \leq A$, $C \leq B$. Si $D \leq C$ se tiene $D \times D \subseteq W$ y $D \cap G \neq \phi$. Sea

$x \in D \cap G$ y $y \in D$. Es claro que $(x,y) \in D \times D$ y $(a,x) \in W$, entonces $(x,y) \in W$ y $(a,x) \in W$, de esto $(a,y) \in \overset{2}{W}$, o sea, $(a,y) \in V$ y $y \in V(a)$. En resumen $D \subseteq W(a)$. Hemos demostrado entonces que $\bigcup_{D \in S_c} D \subseteq V(a)$ y con esto que $\mathcal{B}(a)$ es menos fino que $\mathcal{F}$. El teorema está demostrado.

Notemos finalmente que la condición de ser $\mathfrak{S}$ más fino que $\mathcal{F}$ en el teorema 2, no asegura ahora que se cumpla la condición (III) pués los elementos de $\mathcal{B}$ no son necesariamente elementos de $\mathcal{F}$. Esto ha hecho enunciar la proposición III en la forma anterior.

REFERENCIA

1. N. Bourbaki: Topologie Generale- Livre III

(Recibido en Julio de 1965)