FUNDAMENTACION AXIOMATICA DE LA GONIOMETRIA

Por

MANUEL VINENT

(Departamento de Matemáticas U.N.)

DEFINICION Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES SECANTE (SC) COSECANTE (CC).

77-D $\quad sc\ a = \frac{1}{cs\ a}$

78 $\quad$ sc es una función

Inmediato de la definición

79-D $\quad cc\ a = sc(\pi/2 - a)$

80 $\quad$ cc es una función

Inmediato de la definición

81 $\quad cc\ a = \frac{1}{se\ a}$

De (79-D) y (9-D)

82 $\quad sc\ 0 = 1 \qquad sc\ 0 = \frac{1}{cs\ 0} = \frac{1}{1} = 1$

83 $\quad cc\ \frac{\pi}{2} = 1 \qquad cc = \frac{1}{sn} = \frac{1}{1} = 1$

84 $\quad 0 < a \leq \frac{\pi}{2}$, implica, $sc\ a \geq 1$

Puesto que $0 < cs\ a \leq 1$

85 $\quad 0 < a \leq \frac{\pi}{2}$, implica, $cc\ a \geq 1$

Puesto que $0 < sn\ a \leq 1$

86 $\quad sc\ a = sc(-a)$

De la paridad de la función coseno.

87 $\quad cc\ a = -cc(-a)$

De la imparidad de la función seno.

88 $\quad \lim_{x \to 0+} cc\ x = +\infty$

En efecto

$$\lim_{x\to 0+} cc\,x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{sn\,x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{x}\,\frac{1}{sn\,x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{sn\,x}\,\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{sen\,x}\,\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$

89 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} sc\,x = \infty$

En efecto

$$\lim_{x\to \pi/2-} sc\,x = \lim_{x\to \pi/2-} cc\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \lim_{u\to 0+} cc\,u = +\infty$$

90 $sc\,a = sc(a+2\pi n)$ Inmediato de la periodicidad de la función coseno y de la periodicidad de la función seno, se deduce asimismo;

91 $cc\,a = cc(a+2\pi n)$

92 Secante es una función monótona creciente en el intervalo $[0, \pi/2)$

Es decir que si $a < b$, y, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, y $0 < b < \frac{\pi}{2}$ se debe verificar que $sc\,a < sc\,b$ o lo que es lo mismo, $sc\,a < sc\,(a+c)$, donde $c = b-a$

En efecto,

$$sc\,(a+c) - sc\,a = \frac{1}{cs(a+c)} - \frac{1}{cs\,a} = \frac{cs\,a - cs\,(a+c)}{cs\,(a+c)\,cs\,a} > 0.$$

93 Secante es una función convexa en el intervalo $[0, \pi/2)$

Tenemos que demostrar que si $0 < a < \pi/2$, y $0 < b < \pi/2$, y $a \neq b$ se cumple que, $\frac{1}{2}(sc\,a + sc\,b) - sc\,\frac{a+b}{2} > 0$

Puesto que la función cs es cóncava tenemos que, $\frac{cs\,a + cs\,b}{2} < cs\,\frac{a+b}{2}$ que equivale a, $\frac{2}{cs\,a + cs\,b} > sc\,\frac{a+b}{2}$

Por lo que bastará demostrar que,

$$\frac{1}{2\,cs\,a} + \frac{1}{2\,cs\,b} - \frac{2}{cs\,a + cs\,b} > 0$$

En efecto,

$$\frac{1}{2cs\,a} + \frac{1}{2cs\,b} - \frac{2}{cs\,a + cs\,b} = \frac{cs\,b\,(cs\,a + cs\,b) + cs\,a\,(cs\,a + cs\,b) - 4\,cs\,a\,cs\,b}{2\,cs\,a\;cs\,b\;(cs\,a + cs\,b)}$$

$$= \frac{(cs\,a + cs\,b)(cs\,a + cs\,b) - 4\,cs\,a\,cs\,b}{2\,cs\,a\;cs\,b\;(cs\,a + cs\,b)} = \frac{(cs\,a - cs\,b)^2}{2\,cs\,a\,cs\,b\,(cs\,a + cs\,b)} > 0$$

95 Secante es una función contínua, exepto en los puntos $x = (2n+1)\,\pi/2$

En efecto

95 Cosecante es una función monótona decreciente en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2}]$.

Inmediato de (79-D) y (92)

96 Cosecante es una función convexa en el intervalo $(0, \pi/2]$

Inmediato de (79-D) y (93)

97 Cosecante es una función contínua exepto en los puntos $x = n\pi$.

Demostración análoga a la de (94).

98 El dominio de la función secante es la clase de los reales diferentes de $(2n+1)\pi/2$

Evidente de (4A)

99 El codominio de la función secante es la clase de los y tales que $|y| > 1$

Inmediato de (84) y (86) y (89)

100 El dominio de la función secante es la clase de los reales diferentes de $n\pi$

Evidente de (14)

101 El Codominio de la función secante es la clase de los y tales que $|y| \geqslant 1$

Inmediato de (85) y (87) y (88)

Veámos ahora como se demuestran las proposiciones que se refieren a "argumentos" en alguna relación notable y las relaciones que corresponden a sus respectivos valores de función, sin recurrir, como se suele hacer, a la intuición gráfica.

Ejemplo 1º

102 $b - a = \pi/2$, implica $sn\, b = cs\, a$

en efecto,

$b = \pi/2 + a$, y tenemos entonces,

$sn\, b = sn(\pi/2 + a) = sn\, \pi/2\, cs\, a + cs\, \pi/2\, sn\, a$

$= 1\, cs\, a = cs\, a$

Ejemplo 2º

103 $b + a = \pi$ Implica $sn\, b = sn\, a$

en efecto,

$b = \pi - a$ y entonces, $sn\, b = sn(\pi - b)$

$= sn\, \pi\, cs\, a - cs\, \pi\, sn\, a = -(-sn\, a) = sn\, a$.

Las demás proposiciones de este tipo pueden demostrarse de una manera análoga.

Citaremos las siguientes, que necesitaremos para la representación gráfica de las funciones.

104 $b-a=\pi$ implica $sn\ b=-sn\ a$

105 $b+a=2\pi$ implica $sn\ b=-sn\ a$

106 $b+a=\pi$ implica $cc\ b=cc\ a$

107 $b-a=\pi$ implica $cc\ b=-cc\ a$

108 $b+a=2\pi$ implica $cc\ b=-cc\ a$

DEFINICION DE LAS FUNCIONES INVERSAS

Debido a la periodicidad de todas las funciones goniométricas éstas no son biunívocas. En estas condiciones para poder definir la correspondiente función inversa debemos restringir su dominio

Las funciones inversas recibirán las siguientes denominaciones;

"Argumento cuyo seno es x" ($arcsn\ x$)

"Argumento cuyo coseno es x" ($arccs\ x$)

"Argumento cuya tangente es x" ($arctn\ x$)

"Argumento cuya cotangente es x" ($arcct\ x$)

"Argumento cuya secante es x" ($arcsc\ x$)

Definiremos estas funciones de la siguiente manera:

109-D $y=arcsn\ x$ equivale a decir que, $x=sn\ y$ $(-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2})$

110-D $y=arccs\ x$ equivale a decir que, $x=cs\ y$ $(0\leq y\leq\pi)$

111-D $y=arctn\ x$ equivale a decir que, $x=tn\ y$ $(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2})$

112-D $y=arcct\ x$ equivale a decir que, $x=ct\ y$ $(0<y<\pi)$

113-D $y=arcsc\ x$ equivale a decir que, $x=sc\ y$ $(0\leq y\leq\pi, \neq\frac{\pi}{2})$

114-D $y=arccc\ x$ equivale a decir que, $x=cc\ y$ $(-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}, \neq 0)$

REPRESENTACION GRAFICA DE LAS FUNCIONES GONIOMETRICAS

Es fácil conocer el comportamiento gráfico de las funciones goniométricas a partir de algunas de las propiedades estudiadas.

En cada caso indicaremos las proposiciones que nos informan sobre las peculiaridades de la gráfica.

FUNCION SENO Y FUNCION ARCSN.

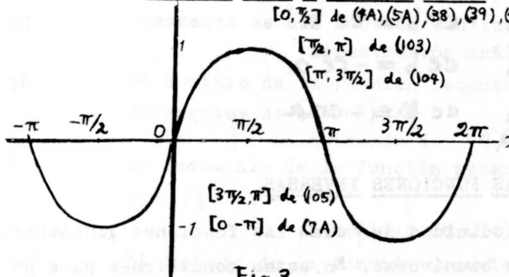


Fig 3

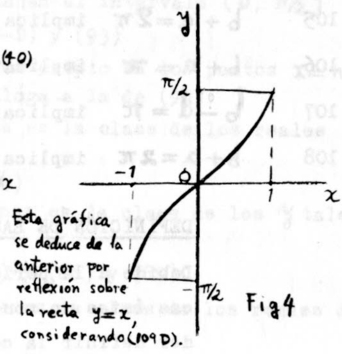


Fig 4

FUNCIONES COSENO Y ARCCS.

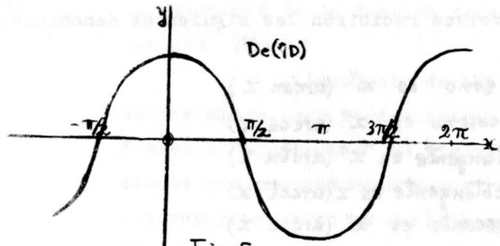


Fig 5

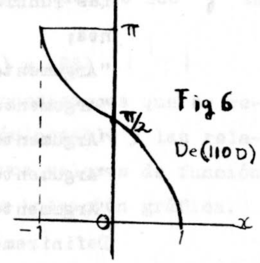


Fig 6

FUNCIONES TANGENTE Y ARCTN.

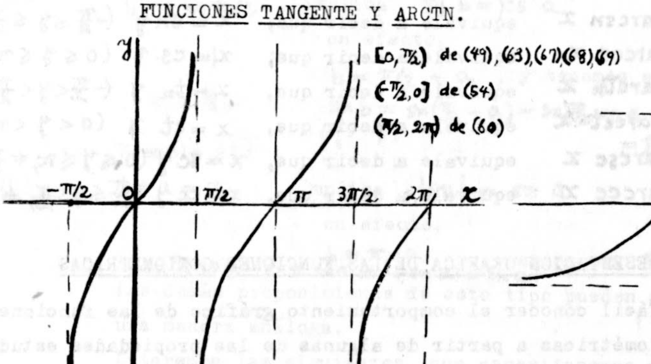


Fig 7

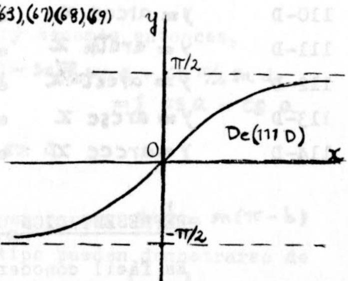
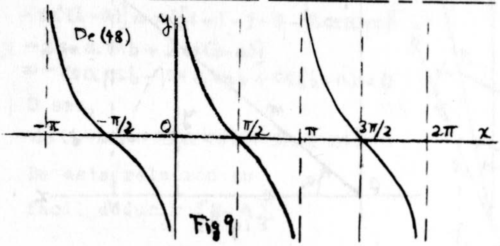
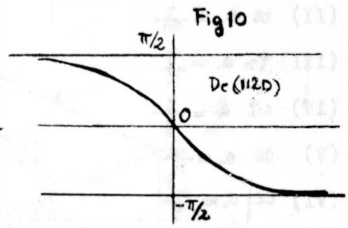


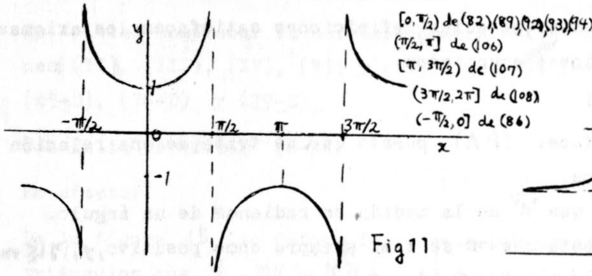
Fig 8

FUNCIONES COTANGENTE Y ARCCT.





FUNCIONES SECANTE Y ARCSC.



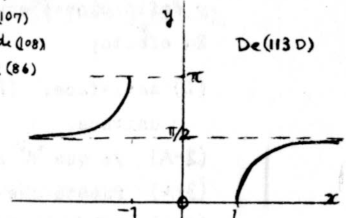
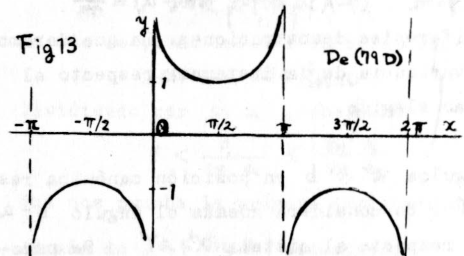


Fig 12

FUNCIONES COSECANTE Y ARCCC.



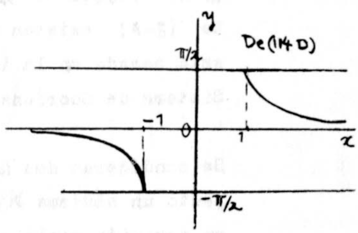


Fig 14

ISOMORFISMOS

Una interpretación de las funciones que hemos estudiado, son las "Funciones Trigonométricas" definidas en el llamado "Círculo Trigonométrico", o, en un ángulo en "posición canónica" en un Sistemas de Coordenadas Cartesianas.

Una de las definiciones usuales de las Funciones Trigonométricas es la siguiente:

(I) $\operatorname{sn} a = \frac{y}{m}$

(II) $\operatorname{cs} a = \frac{x}{m}$

(III) $\operatorname{tn} a = \frac{y}{x}$

(IV) $\operatorname{ct} a = \frac{x}{y}$

(V) $\operatorname{sc} a = \frac{m}{x}$

(VI) $\operatorname{cc} a = \frac{m}{y}$

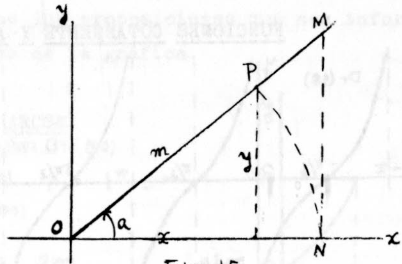


Fig 15

Dónde $m = OP$, y, (x, y) son las coordenadas del punto P.

Comprobaremos que estas definiciones satisfacen los axiomas y definiciones anunciados.

En efecto;

(I) satisface; (1-A) puesto que se trata de una relación unívoca.

(2-A) ya que "a" es la medida en radianes de un ángulo.

(3-A) Puesto que m se toma siempre como positivo, y, $|y| \leq m$.

(4-A) Porque para $a = 0$, $y = 0$.

(5-A) Porque $a = \pi/2$, $y = m$. (7-A) porque $\operatorname{sn}(-a) = \frac{-y}{m}$.

De (8-A) existen diferentes demostraciones. La que daremos está basada en la invariancia de la distancia respecto al Sistema de Coordenadas elegido.

Se condideran dos ángulos a y b en posición canónica respecto un sistema X, Y. Se considera además el ángulo $b - a$, en posición canónica respecto al sistema X', Y'. Se escogen P_1 y P_2 tales que $\overline{OP_1} = \overline{OP_2} = m$ (fig 15) En estas condiciones podemos escribir;

$$x_1 = m \operatorname{cs} a, \quad y_1 = m \operatorname{sn} a \qquad x_2 = m \operatorname{cs} b \qquad y_2 = m \operatorname{sn} b$$

$$x_1' = m, \quad y_1' = 0 \qquad x_2' = m \operatorname{cs}(b-a) \qquad y_2' = m \operatorname{sn}(b-a)$$

Resulta entonces;

$$0 = d^2 - d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (x_1' - x_2')^2 - (y_1' - y_2')^2$$

$$= m^2\left[(cs\,a - cs\,b)^2 + (sn\,a - sn\,b)^2 - \{1 - cs(b-a)\}^2 - sn^2(b-a)\right] = m^2[1+1-1-1-2\,cs\,a\,cs\,b - 2\,sn\,a\,sn\,b + 2\,cs(b-a)]$$

$$= -cs\,a\,cs\,b - sn\,a\,sn\,b + cs(b-a) = 0$$

O sea,

$$cs(b-a) = cs\,a\,cs\,b + sn\,a\,sn\,b$$

De esta relación es fácil deducir (8-A).

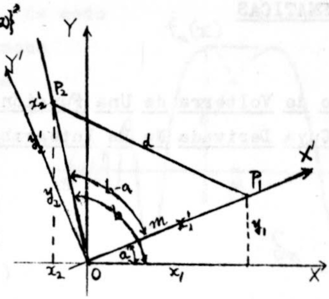


Fig 16

Es trivial comprobar la correspondencia entre las definiciones (II), (III), (IV), (V), y (VI), con las (9-D), (44-D), (45-D), (76-D) y (79-D).

Nos falta verificar (6-A)

En efecto;

De la figura 15 se defuce facilmente por semejanza de triángulos que, $\dfrac{y}{x} = \dfrac{MN}{ON} = \dfrac{MN}{m}$ de donde $y < MN$, o

$$sn\,a < tn\,a$$

Además se puede inferir la relación,

$$sn\,a < a < tn\,a$$

Dividiendo por $sn\,a$, obtenemos

$$1 < \frac{a}{sn\,a} < \frac{tn\,a}{sn\,a}$$

que nos prueba la primera desigualdad de (6-A).

Además de $a < tn\,a$ deducimos;

$a < \dfrac{sn\,a}{cs\,a}$, luego , $a^2 < \dfrac{sn^2 a}{cs^2 a}$ luego,

$$a^2 cs^2 a < sn^2 a$$

de donde

$a^2(1 - sn^2 a) < sn^2 a$, de donde $a^2 < sn^2 a\,(a^2 + 1)$

y finalmente $\dfrac{a}{sn\,a} < \sqrt{a^2+1}$.