El Ejemplo de Volterra de Una Función Diferenciable en el Intervalo [0,1] y Cuya Derivada No Es Integrable-Riemann

Por

Luis Ignacio Soriano

(Dpto. de Matematicas, U.N.)

Consideremos una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n = \ell < 1$. En el intervalo [0,1] suprimimos los puntos del intervalo abierto de longitud ℓ_1 con centro en el punto 1/2 que marcamos con negro en la figura 1. En el centro de cada una de los intervalos blancos se suprimen los puntos de un intervalo abierto de longitud $\ell_2/2$. Se continua en la misma forma y se obtiene un conjunto enumerable de intervalos abiertos negros. El conjunto de los puntos obtenidos al suprimir los intervalos negros, H, se llama el conjunto de Harnack, y evidentemente su medida es $1-\ell$. La unión total de los intervalos negros :

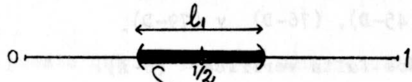

Fig. 1

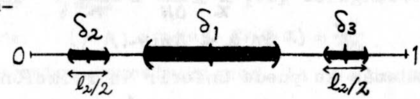

Fig. 2

$$\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n$$

es un conjunto abierto denso en [0,1], donde δ_n es el enesimo intervalo negro. El conjunto de Harnack, H, tiene la propiedad siguiente:

> Cualquier sub-intervalo abierto de [0,1] contiene por lo menos un punto tal que existe una vecindad que no contiene punto de H. (es decir, totalmente contenida en Δ.)
>
> En efecto, al colocar el primer intervalo negro, δ_1, todo los puntos de [0,1] o son negros o están a una distancia menor que 1/2 de un punto negro. Al colocar los intervalos δ_2 y δ_3 los puntos blancos están a una distancia menor que 1/4 de

un punto negro y asi sucesivamente, de modo que la distancia de los puntos blancos a los puntos negros será menos que $1/2^n$.

En $\delta_n = (\alpha, \beta)$ definimos una función $f_n(x)$ como sigue:

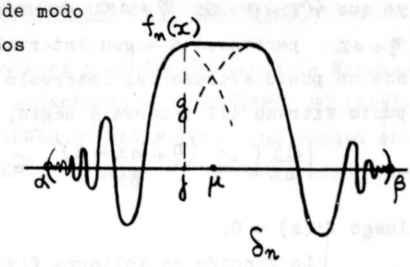

Fig. 3

$$f_n(\alpha) = 0$$

$$f_n(x) = (x-\alpha)^2 \operatorname{sen}\left\{\frac{1}{x-\alpha}\right\}$$

$$\text{en } (\alpha, \gamma],$$

donde γ es el mayor valor de x que corresponde a un maximo de la función $f_n(x)$ y tal que está a la izquierda del punto μ , mitad del intervalo (α , β). Si el valor de $f_n(\gamma) = g$, entonces se hace $f_n(x) = g$ en el intervalo $[\gamma, \mu]$. En el intervalo $[\mu, \beta)$ se hace simétrica con respecto al punto μ como se muestra en la Figura 3.

Consideremos ahora la función de Volterra definida asi:

$$f(x) = f_n(x) \qquad \text{en} \quad \delta_n \quad (n = 1,2,3,\ldots.)$$
$$f(x) = 0 \qquad \text{en } H.$$

Es evidente que la función asi definida es continua. Ahora se va a demostrar que f(x) es derivable en $(0,1)$.

para $x \in (\alpha, \gamma]$ la derivada de f(x) es:

$$f'(x) = 2(x-\alpha)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-\alpha}\right) - \cos\left(\frac{1}{x-\alpha}\right).$$

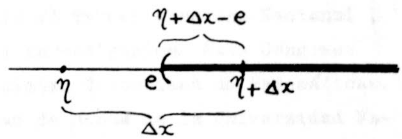

Fig. 4

Cuando x tiende a α por la derecha f'(x) oscila infinitas veces entre $\pm$ 1.

Por la simetría con que construyó la función f(x) pasa lo mismo para el otro punto extremo del intervalo, es decir, f'(x) oscila entre $\pm$ 1 cuando x tiende a β por la izquierda.

Consideremos ahora la derivada de f(x) en un punto η de H. Tenemos:
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(\eta+\Delta x) - f(\eta)}{\Delta x} = \frac{f(\eta+\Delta x)}{\Delta x}$$

ya que $f(\eta)=0$. Si $\eta+\Delta x$ es un punto de H, entonces $f(\eta+\Delta x)=0$. Si $\eta+\Delta x$ pertenece a algun intervalo de Δ , entonces existe por lo menos un punto extremo del intervalo negro entre η y $\eta+\Delta x$. Sea e tal punto extremo del intervalo negro, entonces se tiene:

$$\left|\frac{\Delta f}{\Delta x}\right| \leq \frac{(\eta+\Delta x-e)^2}{\Delta x} \leqslant \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \Delta x \longrightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0)$$

luego f'(x) = 0.

La función de Volterra f(x) es pues derivable y acotada en todo el intervalo (0,1) . Pero cada punto de H es un punto de discontinuidad de f'(x) ya que un punto de H es punto de acumulación de Δ , en donde la oscilación de f'(x) es igual a 2. Como la medida de H no es cero , entonces la función f'(x) no es integrable-Riemann.

REFERENCIA

J. Pierpont : The Theory of Functions of Real Variables.