La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales Ordinarias.

Por: LUCIANO MORA OSEJO (U. de Nariño)

Las soluciones de un sistema de E. O. D. forman un continuum. Sin embargo, un sistema físico gobernado por tal sistema, solo exhibe en general un número finito de estados estables, lopados bien por las condiciones iniciales o bien por haber lopado el estado estacionario a la larga. Un péndulo, p. e., funciona con una amplitud bien determinada, siempre que al comienzo empecemos con una amplitud suficientemente grande, pues de lo contrario en corto tiempo volverá al reposo. Decimos pues, que entre las infinitas soluciones de las ecuaciones del péndulo hay 2 particulares: el estado de reposo, el estado de oscilaciones sostenidas, las cuales son estables en el intuitivo sentido de que otros estados vecinos a cada uno de los descritos, es absorbido rápidamente por el mismo. La catalogación y acondicionamiento de estos estados de entre la infinita variedad de soluciones, constituye la teoria cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales, debida escencialmente a Poincaré,Bendixon, Lefstez, Trapunov, etc.

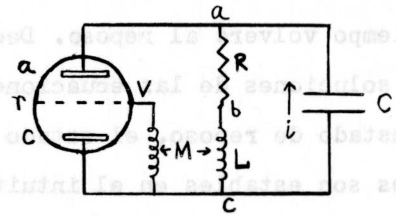
Por otro lado, la gran mayoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales que gobiernan sistemas físicos son no-lineales cuya teoría cuantitativa global no ha podido establecerse. Sin embargo, para un computador es igual que la ecuación sea lineal o no-lineal, en el sentido de que los métodos numéricos de integración son aplicables indistintamente a ecuaciones lineales y no-lineales.

Por este motivo surgen dos cuestiones:

(1) Cómo utilizar los resultados de la teoría cualitativa en la integración numérica?

(2) Cómo utilizar las posibilidades de la integración numérica de las E. D. O. no lineales.

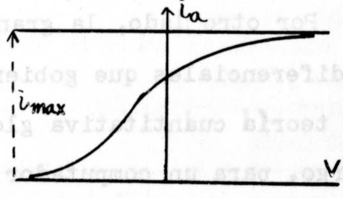
En esta nota queremos ampliar el sentido de estas cuestiones, mostrando el problema del oscilador tríodo de fundamental importancia para la Mecánica no lineal. Ilustremos el dispositivo con el diagrama adjunto



El tríodo a r c consta de ánodo a, rejilla r, cátodo c; Entre r y c existe una diferencia de potencial V (voltaje de rejilla). Entre los polos a y b fluye la corriente i_a (corriente de ánodo). La " característica del tríodo " es la función

$$i_a = f(V)$$

mas o menos como en la figura adjunta.



Un oscilador tríodo puede por ejemplo obtenerse acoplando un circuito oscilante al circuito de placa. El diagrama habla por sí mismo, solo que la inductoria (dos) están conectadas por una inducción mutua negativa ($M > 0$) que realiza la realimentación del circuito por "feed back".

Observemos que:

Carga en C , CV; corriente i, $\frac{d}{dt}CV$; voltaje en L debido a i, $L\frac{d^2}{dt^2}(CV)$; voltaje en L debido a i_a, $-M\frac{di_a}{dt} = -M\frac{df(V)}{dt}$ voltaje en R , $R\frac{d}{dt}(CV)$, voltaje de rejilla V. Sumando estos voltajes obtenemos, en el circuito oscilante, 0 según la segunda ley de Kirchkoff. Con un cambio de variable de la forma $V = kx$, obtenemos la ecuación del tríodo en la forma

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + x = 0 \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{L}\left(R - \frac{M}{C}f(x)\right)$$

Es de segundo orden y <u>no-lineal</u>. La reducimos a un sistema de primer orden no lineal poniendo,

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -g(x)y - x$$

Además es un sistema autónomo, por no figurar explicitamente.

ALGUNOS RESULTADOS DE LA TEORIA CUALITATIVA

Sea el S. A. en forma escalar

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

con f definida en una región $\Delta \subset R^n$ y $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ continuas allí.

En forma vectorial puede escribirse

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})$$

siendo p. e.,

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dots, \dot{x}^n)$$

I- Para cada pareja de valores iniciales $t_0, \underset{\sim}{x}_0$ pasa una y una so la "solución" $x^i = \varphi^i(t)$ cuyo intervalo maximal de definición I_x es $m_1 < t < m_2$.

II- Si $x^i = \varphi^i(t)$ es solución de I_{m_x}; $m_1 < t < m_2$; también lo es

$$x^i = \varphi^i_*(t) = \varphi^i(t+c) \text{ de } I_{m_x}; \quad m_1 - c < t < m_2 - c$$

INTERPRETACION CINEMATICA: A cada solución le hacemos corresponder el movimiento de un punto en el espacio n - dimensional definido por la solución, siendo $(x^1, \cdots, x^n) \in R^n$ y t el tiempo. $\vec{v} = (\dot{x}^1, \cdots \dot{x}^n)$ coincide con el vector velocidad en cada punto. Además del movimiento tenemos la trayectoria del mismo. Si a cada solución le hacemos corresponder la trayectoria, perdemos información por que olvidamos la dirección. Pues si tenemos dos soluciones $x^i = \varphi^i(t)$, $x^i = \psi^i(t)$ puesto que no pueden cruzarse, solo pueden coincidir pero una puede estar separada respecto a la otra. Por esto a cada trayectoria le asignamos una flecha.

III- Existen 3 clases de trayectorias: 1) las correspondientes a estados de equilibrio. 2) trayectorias periódicas y 3) trayectorias que no se intersectan.

Si $\varphi^i(t)$ es solución I_{m_x}; $m_1 < t < m_2$, $\varphi^i(t_1) = \varphi^i(t_2)$, $t_1, t_2 \in I_{m_x}$

$$\varphi^i(t_1) = \varphi^i(t_2 + t_1 - t_2) = \varphi^i(t_2 + c) = \varphi^i_*(t_2) = \varphi^i(t_2) \Rightarrow \varphi^i(t+c) = \varphi^i(t) \text{ de intervalo}$$

maximal $m_1 - c < t < m_2 - c$, para todo C; siendo los dos intervalos idénticos concluimos que $m_1 = -\infty$ y $m_2 = +\infty$

Entonces se presentan dos casos:

1) $\forall t$, $\varphi^i(t) = a^i \in \Delta$ independientemente de t o sea, el punto $(a^1, \cdots, a^n)$ no se mueve. Es un estado de equilibrio(Sin

gularidad).

$$2)\ \exists T>0, \forall t \quad \varphi^i(t+T)=\varphi^i(t) \quad i=1,2,\cdots,n$$

y por lo menos para un $i, |t_1-t_2|<T \quad \varphi^i(t_1)\neq\varphi^i(t_2)$

Entonces $\varphi^i(t)$ es una solución periódica de período T y su trayectoria es una curva cerrada K.

IV- Definición. Ciclo Límite (Poincaré). Es una solución periódica aislada. O sea no hay tryectorias cerradas en la vecindad de K.

V- Estabilidad de un estado de Equilibrio. Teoría de Liaporenov.

Para el S.A. $\dot{x}=f(x)$ indicamos con $\varphi(t,\xi)$ la solución con valores iniciales $t=0 \quad x=\xi$ o sea, $\varphi(0,\xi)=\xi$

Definición. a es estable-L si:

i) $\exists \rho>0, |\xi-a|<\rho \implies \varphi(t,\xi)$ está definida para todo $t>0$.

ii) $\forall \varepsilon>0, \exists \delta<\rho, |\xi-a|<\delta \implies |\varphi(t,\xi)-a|<\varepsilon$

Un estado a estable-L es asintóticamente estable si

iii) $\exists \sigma>\rho, |\xi-a|<\sigma \implies \lim_{t\to\infty}|\varphi(t,\xi)-a|=0$

Ejemplo: Sea $\dot{x}=Ax$ un sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes; si todos los valores de **A** tienen una parte real negativa,

$$|\varphi(t,\xi)|\leq r|\xi|e^{-at} \quad t\geq 0$$

o sea el estado de equilibrio $x=0$ es estable-L y asintóticamente estable.

Como caso particular sea $L(p)z=0$ una ecuación lineal homogenea de coeficientes constantes.

El polinomio característico $L(\lambda)$ se llama "estable" si todas sus raices tienen partes reales negativas. Sean ellas

$$\lambda_j = \mu_j + i\gamma_j \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

Si $L(p)$ es estable

$$\exists\, \alpha > 0 \; ; \; \mu_j < -\alpha \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

En este caso para toda solución de la ecuación existe $M > 0$ tal que

$$|\varphi(t)| < M e^{-at} \qquad t \geq 0$$

(basta considerar una "solución fundamental" $z_s = t^s e^{\lambda_j t}$).

TEOREMA DE LIAPOUNOV. Sea $a = (a^1, \cdots, a^n)$ un estado estable del S. A. Pongamos $x^i = a^i + \Delta x^i \quad i = 1, \ldots, n$. Sean Δx^i las nuevas incógnitas. Reemplazando y desarrollando en serie de Taylor se obtiene:

$$\Delta x^i = f^i(a) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j} \Delta x^j + R^i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

donde R^i es un infinitesimal de orden superior con respecto a las incógnitas (parte no lineal). Por ser a un estado de equilibrio $f^i(a) = 0$

Poniendo $\partial f^i(a)/\partial x^j = a^i_j$ se tiene:

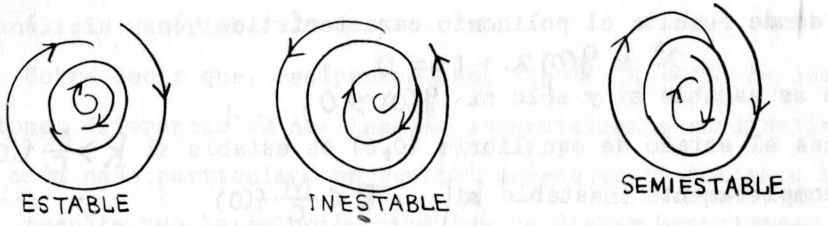
$$\Delta x^i = \sum_{j=1}^n a^i_j \, \Delta x^j + R^i$$

Si todos los autovalores de $A = (a^i_j)$ tienen parte real negativa a es asintóticamente estable. O sea $\exists\, \sigma > 0, |\xi - a| < \sigma \implies$

$$|\varphi(t, \xi) - a| \leq r\, |\xi - a|\, e^{-\alpha t}$$

Teorema - Corolario: a es completamente inestable si cualquier solución $\varphi(t, \xi)$ que empieza en $\xi \neq a$ de la esfera $|\xi - a| < \sigma$ sale de la esfera y no vuelve. Si todos los valores de **A** tienen parte real positiva $\underset{\sim}{a}$ es completamente inestable.

VI- Estabilidad de los ciclos límites.: Sea $\underset{\sim}{x}=\varphi(t)$ un ciclo límite y K su trayectoria cerrada. K separa el plano en interior y exterior. Como las trayectorias no se intersectan, cada una de ellas o es interior de K o exterior. Se presentan dos casos mutuamente excluyentes. Puesto que tanto las trayectorias interiores como exteriores "adhieren" especialmente a K bien cuando $t \to \infty$. Si todas lo hacen cuando $t \to \infty$ el ciclo límite se hace "estable". Si lo hacen cuando $t \to -\infty$ el ciclo límite es inestable. Si las anteriores se acercan cuando $t \to -\infty$, las exteriores cuando $t \to \infty$, el ciclo es semiestable.



VII- Criterio para la existencia de un ciclo límite. Sea $\varphi(t)$ una solución del S.A. definida para todo $t \geqslant t_0$ y que permanece en un conjunto cerrado y acotado $F \subset \Delta$. Un punto ϕ se llama punto límite de $\varphi(t)$ si existe una sucesión creciente $t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$ con $\lim t_n = \infty$ tal que $\lim \varphi(t_n) = \phi$. El conjunto Ω de todos los límites de $\varphi(t)$ se dice el conjunto-límite de $\varphi(t)$.

Es no vacío cerrado y acotado. Si $\xi \in \Omega$, $\varphi(t,\xi) \ \exists \ \forall t$ y su trayectoria está contenida en Ω. Si $\varphi(t)$ es un estado de equilibrio $\varphi(t) \equiv x_0$, $\Omega \equiv x_0$. Si $\varphi(t)$ es periódica de trayectoria K $\Omega(\varphi) \equiv K$. Si K es trayectoria de solución periódica y $\varphi(t)$ se acerca especialmente a K cuando $t \to +\infty$, $K \equiv \Omega(\varphi)$

Teorema de Poincaré-Bendixon. Si Ω no contiene estados de equilibrio $\Omega \equiv K$ y se presentan dos casos 1) $\varphi(t)$ es solución periódica y K es su trayectoria, o 2) la trayectoria de φ "adhiere" a K cuando $t \to +\infty$

Aplicacion a la ecuación del tríodo.

Punto de vista cualitativo. En el sistema

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = -g(x)y - x$$

el único estado de equilibrio es el origen $x = 0$, $y = 0$.

Linearizando el sistema alrededor de (0,0) obtenemos

$$\dot{x} = y \quad , \quad \dot{y} = -g(0)\,y - x$$

de donde resulta el polinomio característico

$$\lambda^2 + g(0)\lambda + 1 = 0$$

que es estable si y sólo si $g(0) > 0$,

O sea el estado de equilibrio (0,0) es estable si $R > \frac{M}{C} f(0)$ (a)

y completamente inestable si $R < \frac{M}{C} f(0)$ ---------(b)

Entonces por el teorema de Poincaré-Bendixon, cualquier trayectoria que no contenga ese único estado de equilibrio, o bien será cerrada y corresponderá a una solución periódica o se acercará espiralmente a una tal solución. O sea, cuando se cumple la condición (b) el oscilador es fuente de oscilaciones no-amortiguadas.

<u>Punto de vista cuantitativo</u>. Según la elección de la función f(V) característica del tríodo, el sistema admite uno o mas ciclos límites, cuya construcción, puede elegir acertadamente los valores iniciales que a su vez conducen a soluciones periódicas.

Puesto que existe una dependencia continua entre la solución y las condiciones iniciales, el variar éstas cambia el período y demás características de la solución.

Por tanto, el proceso de integración se saben controlar las variaciones de las condiciones iniciales e investigar la estabilidad de la solución periódica. Un famoso teorema de Liapunov — Andeonov da criterios para ello; pero las dificultades numéricas inherentes al conjunto de los mismos, obligan al especialista en análisis numérico a idear criterios que inspirados en los de Liapunov, sean mas fáciles de computar. Esto muestra un nuevo aspecto de la interacción entre la teoría cualitativa y el desarrollo del análisis numérico.

Sobra decir que, recíprocamente, siendo la tería de las ecuaciones diferenciales no-lineales escencialmente cualitativa, pues cada caso particular, en general merece un tratamiento separado, resulta que la solución numérica de dichas ecuaciones, arroja mucha luz sobre los fenómenos que exhiben familias enteras de dichas ecuaciones.

Lo anterior, unido al hecho de que para el cómputo poco importa que una ecuación sea lineal o no, muestra la absoluta necesidad de desarrollar el Análisis Numérico sobre amplias bases modernas, con miras tanto a las aplicaciones prácticas como a las teóricas. En este campo se muestra elocuente el hecho de que son los problemas tecnológicos la fuente genuina de los verdaderos problemas que animan la vida de las matemáticas.