Ecuaciones Diferenciales

Por: CARLOS LEMOINE (S.C.M.)

Es claro que dada una función indefinidamente diferenciable $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ puede existir un operador diferencial P(D) y una función u que sea indefinidamente diferenciable en $x_1, \cdots x_j$ ($j < n$) y no lo sea en $x_{j+1}, \cdots x_n$.

Ejemplo $f(x_1, x_2) = 0$ $P(D) = D_{x_1}$ tiene como solución cualquier función dependiente solamente de y.

Voy a dar una condición suficiente para que un operador con coeficientes indefinidamente diferenciables P(x,D) sea tal que si u es la solución de la ecuación $P(x,D)u = f \in C^\infty$ es indefinidamente derivable en las primeras j variables, también lo sea en las últimas n - j.

Usando las notaciones de Hörmander (Linear Partial Differential Operators) el resultado se puede enunciar asi:

Teorema 1. Sea Ω un abierto de R_n, P(x,D) un operador definido en Ω con coeficientes indefinidamente derivables, y tal que en un punto x_0 de Ω sea parcialmente hipoelíptico respecto de $x'' = 0$, si f es una función indefinidamente derivable en Ω y u una distribución que satisface a

i) Existe $K_0(\xi) \in K$ tal que $u \in K_0(\xi)(1+|\xi|)^\nu$
(para todo ν entero positivo)

ii) $P(x,D)u = f$ en Ω,

entonces u es indefinidamente derivable en Ω.

Ejemplo $a_n^m(x)+\sum_{|\alpha|<m} a^\alpha(x)D^\alpha$ satisface las condiciones enuncia das si tomamos $\xi'=(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$, $\xi''=\xi_n$

Bibliografía.

Linear Partial Differential Operators: D. L. Hörmander, 1963, Springer-Verlag-Berlin, Gottingen, Meildelberg.

- 0 -