Filtros Minimales de Cauchy

Por: JAIRO CHARRIS (S. C. M.)

Teorema Si $(X, \mathcal{W})$ es un espacio uniforme tal que $(W_n)_{n\in N}$ es un sistema fundamental de entornos de X (simétricos), todo filtro minimal de Cauchy de X tiene una base numerable.

En efecto, si $\mathcal{F}$ es un filtro minimal de Cauchy, entonces

$$\mathcal{B} = \{ W_n(A) \mid A \in \mathcal{F} \}$$

es una base de $\mathcal{F}$. Como por otra parte, para cada n existe $A_n \in \mathcal{F}$ tal que $A_n \times A_n \subseteq W_n$, si formamos $\mathcal{B}_N = \{ W_n(A_n) \mid n \in N \}$, $\mathcal{B}_N$ es una base, claramente enumerable. En efecto: si $F \in \mathcal{F}$ $F \supseteq W(A)$, $W \in \mathcal{W}$, $A \in \mathcal{F}$. Si tomamos $W_n \mid \overset{2}{W_n} \subseteq W$ vamos a ver que $W_n(A_n) \subseteq W(A)$. En efecto, sea $y \in W_n(A_n)$, $x \in A_n$ tal que $(y,x) \in W_n$. Si tomamos $z \in A_n \cap A \neq \phi$, se tiene: $(x,z) \in A_n \times A_n \subseteq W_n$ entonces $(y,z) \in \overset{2}{W_n} \subseteq W$ y por tanto $y \in W(A)$ lo cual completa la demostración.