Estructuras Elásticas

Por: JANUARIO VARELA (S.C.M.)

Definicion. Diremos que la estructura de un conjunto X es elástica si X es isomorfo a un subconjunto propio provisto de la estructura inducida sobre él por la de X.

Proposición 1. Un anillo finito conmutativo es un cuerpo si y solo si A_d no es elástico.

Veamos primero que si A no es un cuerpo A_d es elástico basta considerar la aplicación de A en A, $x \to ax$, donde a es un elemento de A no inversible.

Proposición 2. Un espacio vectorial es de dimensión finita si y solo si no es elástico.

Es claro que si un espacio vectorial es de dimensión finita no puede tener subespacio propio isomorfo. Por otra parte si un espacio vectorial es de dimensión infinita y $(e_i)_{i\in I}$ una de sus bases, la aplicación

$\sum \lambda_i e_i \to \sum \lambda_i e_{\varphi(i)}$ (donde $\varphi(i) = \min\{j \mid j > i\}$ para un buen orden que podemos suponer en el conjunto de índices), hace al espacio vectorial elástico.

Propsición 3. Sea A un anillo conmutativo tal que A no es un cuerpo. Sea E un A-módulo infinito; entonces para que E sea elástico basta que E sea libre.

En efecto, sea $(e_i)_{i\in I}$ una base de E. Consideremos la aplicación lineal

$$\sum \lambda_i e_i \to \sum \mu_i \quad \text{donde} \quad \mu_i = \begin{cases} \lambda_i e_i & \text{si } i \neq j \\ a \lambda_j e_j \end{cases}$$

donde a es un elemento de **A** no inversible.

Como la aplicación no es sobre **E** resulta elástico.

Corolario. **R** no es un **Z** módulo libre.

Basta considerar que **R** considerado como **Z** módulo no es elástico. En efecto toda aplicación **Z** lineal de **R** en **R** es de la forma f(x)=xa; esta aplicación siempre es cero o sobre y por lo tanto **R** no es elástico.