Sobre un teorema de Convergencia de Filtros

Por: JAIRO CHARRIS (S.C.M.)

El teorema siguiente:

Teorema. Sea $(X,\mathcal{W})$ espacio uniforme, $\mathfrak{B}$ una base de filtro sobre X, $\mathfrak{S}$ un filtro sobre X, $\mathfrak{S}\geqslant\mathfrak{B}$. Para que $\mathfrak{B}\longrightarrow a$ $a\in X$ es necesario y suficiente

(α) $\mathfrak{B}$ sea de Cauchy.

(β) $\mathfrak{S}\longrightarrow a$

puede generalizarse de la sguiente manera. En lugar de una base de filtro, tomamos una familia $\mathfrak{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$ ordenada por una relación de orden $\leqslant$ filtrante y formamos: $\mathfrak{F}=\{F\subseteq X \mid F\supseteq\bigcup_{B\leqslant A} B$ $B\in\mathfrak{B}, A\in\mathfrak{B}\}$ $(\mathfrak{B}\neq\phi, \phi\in\mathfrak{B})$. Claramente $\mathfrak{F}$ es un filtro sobre X y tenemos:

Teorema. Si $\mathfrak{S}$ es otro filtro sobre X tal que $\mathfrak{S}\geqslant\mathfrak{F}$ y además tal que todo elemento de $\mathfrak{S}$ intersecta a todos los elementos de $\mathfrak{B}$ menores que un elemento A dado de $\mathfrak{B}$, entonces: Para que $\mathfrak{F}\rightarrow a$ es necesario y suficiente:

(α) $\mathfrak{S}\rightarrow a$

(β) Para todo $W\in\mathcal{W}$, existe $A\in\mathfrak{B}$ tal que $B\times B\subseteq W$ para $B\in\mathfrak{B}$ tal que $B\leqslant A$.