# Un Criterio Sobre La Convergencia de La Integral Impropia

Por : YU TAKEUCHI (S.C.M.)

**Teorema-1**

Sea f(x) una función positiva y creciente, si

$$\lim_{x\to\infty} xf'(x)/f(x) = r$$

es mayor que uno la integral

$$\int^{\infty} 1/f(x)\, dx \qquad (1)$$

converge. Si r es menor que uno la integral (1) diverge.

**Demostración**

Suponemos que $r > 1$, entonces $\varepsilon = \frac{r-1}{2}$ dado existe $x_0$ tal que $x > x_0$ implica $1+\varepsilon = r - \varepsilon < \frac{x f'(x)}{f(x)} < r + \varepsilon$

o bien,
$$\frac{df}{dx} > (1+\varepsilon)\frac{f(x)}{x} \qquad (2)$$

Tomamos una función $\phi(x)$ que satisface la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{d\phi}{dx} = (1+\varepsilon)\,\phi(x)/x \qquad \phi(x_0) = f(x_0) \qquad (3)$$

la solución es

$$\phi(x) = \frac{f(x_0)}{x_0^{1+\varepsilon}}\; x^{1+\varepsilon} \qquad (4)$$

En una vecindad de $x_0$ , tenemos:

$$\phi(x) < f(x) \qquad (5)$$

Ahora, vamos a demostrar la desigualdad anterior para todo valor de $x$ . Suponemos que existe un punto $x$ ( $> x_0$) tal que

$$\phi(x) > f(x)$$

entonces, por la continuidad de $f(x)$ y $\phi(x)$ existe un punto $x_1$ tal que

$$\begin{array}{ll} x < x_1 & f(x) > \phi(x) \\ x = x_1 & f(x_1) = \phi(x_1) \\ x > x_1 & f(x) < \phi(x) \end{array}$$

o bien,

$$f(x_1) = \phi(x_1), \qquad f'(x_1) < \phi'(x_1) \tag{6}$$

Pero, de (2) y (3) se tiene:

$$f'(x_1) > (1+\varepsilon)\, f(x_1)/x_1 = (1+\varepsilon)\,\phi(x_1)/x_1 = \phi'(x_1)$$

Esto contradice a (6). Entonces tenemos:

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{x_0^{1+\varepsilon}}\, x^{1+\varepsilon}$$

Como la integral $\int^{\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\, dx$ converge, entonces la integral (1) también converge.