Una demostración del teorema fundamental del álgebra

Por: Leonidas Mouthon (U. Ind. de Santander).

Teorema: Si $P(z)$ es un polinomio de grado $n \geqslant 1$, entonces tiene al menos un cero.

Demostración: Primero demostramos la existencia de un cero del polinomio $P(z)$ cuando los coeficientes son números reales.

Sea $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0 \neq 0, a_n \neq 0)$

Pongamos $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, entonces podemos escribir

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} r^k (\cos k\theta + i\,\mathrm{sen}\,k\theta)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} r^k \cos k\theta + i \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} r^k\,\mathrm{sen}\,k\theta$$

Llamemos $A = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} r^k \cos k\theta$ y $B = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} r^k\,\mathrm{sen}\,k\theta$

Formemos la función $V = \operatorname{arctg}\frac{B}{A}$ y derivémosla formalmente con respecto a r y θ , entonces:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A\frac{\partial B}{\partial r} - B\frac{\partial A}{\partial r}}{A^2 + B^2} = f(r,\theta)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{A\frac{\partial B}{\partial \theta} - B\frac{\partial A}{\partial \theta}}{A^2 + B^2} = g(r,\theta)$$

Consideremos la región $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ y supongamos que $A^2 + B^2 \neq 0$ para cada valor de R. En esta región las funciones $f(r,\theta)$ y $g(r,\theta)$ son continuas y además $\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial r}$ en efecto.

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{-A^2\frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial B}{\partial \theta} + B^2\frac{\partial B}{\partial r}\frac{\partial A}{\partial \theta} + A^2\left(A\frac{\partial^2 B}{\partial r\partial\theta} - \frac{\partial B}{\partial r}\frac{\partial A}{\partial \theta} - B\frac{\partial^2 A}{\partial r\partial\theta}\right)}{(A^2+B^2)^2}$$

$$+\frac{B^2\left(\frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial B}{\partial \theta}+A\frac{\partial^2 B}{\partial r\partial\theta}-B\frac{\partial^2 A}{\partial r\partial\theta}\right)+2AB\left(\frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial A}{\partial\theta}-\frac{\partial B}{\partial r}\frac{\partial B}{\partial\theta}\right)}{(A^2+B^2)^2}=\frac{\partial g}{\partial r}$$

Como $h(r,\theta)=\frac{\partial f}{\partial\theta}=\frac{\partial g}{\partial r}$ es una función continua en el recinto $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ entonces se debe tener que

$$\text{(I)}\quad \int_0^{2\pi}\int_0^R h(r,\theta)\,dr\,d\theta=\int_0^R\int_0^{2\pi} h(r,\theta)\,d\theta\,dr$$

Pero, calculando separadamente las dos integrales repetidas, tenemos

$$\int_0^R\int_0^{2\pi} h(r,\theta)\,d\theta\,dr=\int_0^R f(r,\theta)\Big]_0^{2\pi}dr$$

$$=\int_0^R\left\{\frac{\left(\sum_{k=0}^n a_{n-k}r^k\cos k\theta\right)\left(\sum_{k=0}^n k\,a_{n-k}r^{k-1}\cos k\theta\right)}{A^2+B^2}-\frac{\left(\sum_{k=0}^n a_{n-k}r^k\operatorname{sen}k\theta\right)}{A^2+B^2}\times\left(-\sum_{k=0}^n k\,a_{n-k}r^{k-1}\operatorname{sen}k\theta\right)\right\}\Bigg]_0^{2\pi}dr$$

$$=\int_0^R\frac{\left(\sum_{k=0}^n a_{n-k}r^k\right)\left(\sum_{k=0}^n k\,a_{n-k}r^{k-1}\right)-\left(\sum_{k=0}^n a_{n-k}r^k\right)\left(\sum_{k=0}^n k\,a_{n-k}r^{k-1}\right)}{A^2+B^2}\,dr=0$$

Por otro lado,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R h(r,\theta)\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi} g(r,\theta)\Big]_0^R d\theta=\int_0^{2\pi}\left(g(R,\theta)-g(0,\theta)\right)d\theta>0$$ en efecto

$$g(r,\theta)=\frac{\left(\sum_{k=0}^n a_{n-k}r^k\cos k\theta\right)\left(\sum_{k=0}^n k\,a_{n-k}r^k\cos\theta\right)}{A^2+B^2}+\frac{\left(\sum_{k=0}^n a_{n-k}r^k\operatorname{sen}k\theta\right)\left(\sum_{k=0}^n k\,a_{n-k}r^k\operatorname{sen}k\theta\right)}{A^2+B^2}$$

es decir

$$g(r,\theta)=\frac{n\,a_0^2\,r^{2n}+\text{ monomios en } r \text{ de grado menor que } 2n}{a_0^2\,r^{2n}+\text{ monomios en } r \text{ de grado menor que } 2n}$$

asi que

$$\lim_{r\to\infty} g(r,\theta)=n$$

luego dado $0<\varepsilon<1$, existe un número N tal que $g(r,\theta)\in(n-\varepsilon, n+\varepsilon)$ para todo $r>N$.

Si fijamos $R>N$ tendremos entonces que $g(R,\theta)>n-\varepsilon$, $g(0,\theta)=0$ ya que r aparece como potencia $\geqslant 1$ en cada monomio del numerador de $g(r,\theta)$ y en el denominador aparece el término a_n y en los otros monomios la potencia de r es mayor o igual a 1.

$$g(R,\theta)-g(0,\theta)>n-\varepsilon$$

Luego

$$\int_0^{2\pi}(g(R,\theta)-g(0,\theta))d\theta>\int_0^{2\pi}(n-\varepsilon)\,d\theta=(n-\varepsilon)2\pi>0$$

Como los valores de las integrales repetidas en (I) nos resultaron distintas, esto nos indica que la continuidad de la función $h(r,\theta)$ debe fallar por lo menos en un punto z_0 y en este punto debe tenerse que

$$A^2+B^2=0 \implies A=0,\ B=0 \implies P(z_0)=0$$

Consideremos ahora $P(z)=a_0z^n+\cdots+a_{n-1}z+a_n \quad (a_0\neq 0)$ un polinomio de grado n con coeficientes complejos.

Sea $Q(z)$ el polinomio de grado n y cuyos coeficientes son los conjugados de $a_i\ (i=0,\cdots,n)$

$$Q(z)=\overline{a}_0z^n+\overline{a}_1z^{n-1}+\cdots+\overline{a}_{n-1}z+\overline{a}_n$$

El polinomio $R(z)=P(z)Q(z)$ es de grado 2n y tiene coeficientes reales, en efecto

$$R(z)=(a_0z^n+\cdots+a_{n-1}z+a_n)(\overline{a}_0z^n+\cdots+\overline{a}_{n-1}z+\overline{a}_n)$$

$$= a_0\overline{a}_0 z^{2n} + (a_0\overline{a}_1 + a_1\overline{a}_0) z^{2n-1} + (a_0\overline{a}_2 + \overline{a}_0 a_2 + a_1\overline{a}_1) z^{2n-2}$$

$$+ \cdots + \left(\sum_{i=0}^{k} \overline{a}_i\, a_{k-i}\right) z^{2n-k} + \cdots$$

$$\cdots + a_n\overline{a}_n$$

Como el polinomio $R(z)$ tiene coeficientes reales, él tiene por lo menos un cero, digamos z_0, es decir $Q(z_0)P(z_0)=0$ y esto último implica que $Q(z_0)=0$ o $P(z_0)=0$

Si $P(z_0)=0$ entonces z_0 es un cero de $P(x)$.

Si $Q(z_0)=0$ entonces $\overline{z}_0$ es un cero de $P(x)$.