Una observación sobre el teorema de la integral de Cauchy

Por: Bernard de Jong (UNESCO)

El teorema de la integral de Cauchy dice en una de sus formas mas sencillas:

Si la función F(z) es analítica en el recinto simplemente conexo G, cualquiera que sea una trayectoria cerrada y simple, C, contenida en G, es:

$$\int_C F(z)\,dz = 0$$

Se puede extender el teorema de la manera siguiente:

Si la función F(z) es analítica en el interior de una trayectoria cerrada y simple C, y continua sobre C (con respecto a C y su interior), se cumple:

$$\int_C F(z)\,dz = 0$$

Hans Heilbronn dió una demostración de este teorema, usando transformaciones conformes[1].

Theodor Estermann presentó una prueba con medidas mas sencillas, usando todavía la teoría de integración de Lebesgue[2].

Aqui se sigue una modificación de la prueba de Estermann, usando medidas elementales solamente.

C sea definida por

$$\begin{aligned} x &= f(u) \quad \text{para} \quad a \leqslant x \leqslant b \quad (I = [a,b]) \\ y &= g(u) \end{aligned}$$

siendo $f(u)$ y $g(u)$ funciones continuas en I y de variación limitada.

Además se cumple $f(u_1) = f(u_2)$ y $g(u_1) = g(u_2)$ para (y solamente para) $u_1 = a$ y $u_2 = b$

Para cada n (=1,2,3,...) subdividimos el intervalo I en subintervalos $I_{n,r}$ (de longitudes iguales):

$$a + (b-a)\,2^{-n}(r-1) \leq u \leq a + (b-a)\,2^{-n}\cdot r$$
$$r = 1, 2, 3, \ldots$$

Definimos $K_{n,r}(x) = 1$ si $f(u)$ asume el valor x en $I_{n,r}$

$= 0$ si $f(u)$ no asume el valor x en $I_{n,r}$

Evidentemente $K_{n,r}(x) = 0$ para $x < \min(n,r)$

$= 1$ para $\min(n,r) < x < \max(n,r)$

$= 0$ para $x > \max(m,r)$, siendo

min(n,r) y max(n,r) el mínimo y el máximo respectivamente de $f(u)$ en el subintervalo cerrado

$$a + (b-a)\,2^{-n}(r-1) \leq u \leq a + (b-a)\,2^{-n}r$$

Es claro que la función

$$K_n(x) = \sum_{r=1}^{2^n} K_{n,r}(x)$$

es una función escalera e indica en cuantos intervalos $I_{n,r}$ de la subdivisión de I con 2^n subintervalos la función $f(u)$ asume el valor x.

Además es claro que $K_{n+1}(x) \geq K_n(x)$ y que

$K_n(x) = 0$ para $x < m$, y

para $x > M$,

siendo m y M el mínimo y el máximo respectivamente de la función $f(u)$ en I.

Tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(x)\,dx = \int_m^M K_n(x)\,dx = \sum_{r=1}^{2^n} (\max(n,r) - \min(n,r))$$

De la variación limitada de la función $f(u)$ sigue inmediatamente que existe un número positivo N, tal que

$$\sum_{r=1}^{2^n} (max(n,r) - min(n,r)) < N$$

Observamos que los puntos extremos de los intervalos en los cuales $K_n(x)$ es constante, forman un conjunto finito para cada n. Por lo tanto el conjunto de los puntos extremos de los intervalos en los cuales $K_n(x)$ es una constante para n = 1,2,3,... forman un conjunto enumerable $e_1, e_2, e_3, \ldots$

Consideramos ahora la función $K(x)$ (definida para cada x) que indica el número de veces que $f(u)$ asume el valor x en I.

Tenemos $\lim_{n \to \infty} K_n(x) = K(x)$ porque

a) para un x tal que $K(x) = 0$ todos los $K_n(x) = 0$

b) para un x tal que $K(x) = 1$ todos los $K_n(x) = 1$

c) para un x tal que $K(x) = t$ existen exactamente t valores diferentes $v_1, v_2, v_3, \ldots v_t$ en I, tales que $f(v_i) = x$.

Sea d el mínimo de todas las distancias entre dos valores v_i. Ahora, $K_n(x) = t$ para $2^{-n} < d$, y entonces lim $K_n(x) = K(x)$

d) para un x tal que $K(x) = \infty$ existen para cada número natural t valores diferentes $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_t$ en I tales que $f(v_i) = x$. Sea el mínimo de todas las distancias entre dos valores de v_i. Entonces, para cada t tenemos $K_n(x) \geqslant t$,

si se cumple $2^{-n} \leqslant d(t)$, en otras palabras

$$\lim_{n \to \infty} K_n(x) = \infty$$

Ahora vamos a comprobar que para cada δ (positivo) existe un número x tal que ninguna de las líneas rectas $x = x + j\delta (j \in \mathbb{Z})$ tiene un número infinito de puntos en común con C.

Suponemos lo contrario, es decir ningún número en el intervalo $0 \leq x < \delta$ sirve como número x_0; entonces ciertamente ningn número de intervalo cerrado $0 \leq x \leq \frac{\delta}{2}$ sirve.
En otras palabras, para cada ξ de este intervalo existe un número entero $j = j(\xi)$ tal que la línea recta $x = \Xi$ $(\Xi = \xi + j(\xi)\delta)$ tendrá un número infinito de puntos en común con C. Por consecuencia existe un $n = n(\Xi)$ tal que $K_n(\Xi) > \frac{10N}{\delta}$ para $n = n(\Xi)$

Siendo $k_n(x)$ una función escalera, no solamente $k_n(\Xi)(x) > \frac{10N}{\delta}(x = \Xi)$ sino para todos los x en un intervalo $\Xi - \alpha < x < \Xi + \beta$.

Si Ξ es un punto interior de este intervalo, asociamos con Ξ este intervalo. Si Ξ es un punto extremo de este intervalo, es decir Ξ es un punto de e_i , mencionado anteriormente, asociamos con Ξ el intervalo $\Xi - \frac{\delta}{20(2^i)} < x < \Xi + \frac{\delta}{20(2^i)}$.

Asi pues, podemos también asociar de manera única, con cada punto ξ del intervalo $0 \leq x \leq \frac{\delta}{2}$ un intervalo de la forma $\xi - \alpha < x < \xi + \beta$ (tipo A) o un intervalo de la forma $N(\xi, \delta/20(2^i))$ (tipo B)

En ambos casos ξ es un punto interior del intervalo que asociamos con ξ.

Según el teorema de Heine-Borel basta un número finito de estos intervalos para cubrir el intervalo $0 \leq x \leq \frac{\delta}{2}$.

La longitud total de los intervalos del tipo B es menor que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{10(2^i)} = \delta/10$. Por lo tanto la parte del intervalo $0 \leqslant x \leqslant \delta/2$ no cubierta por intervalos del tipo B (y por consecuencia cubierta por intervalos del tipo **A**) consiste de intervalos con longitud total a lo menos $\frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{10} = \frac{4\delta}{10}$

Sean estos intervalos (**tipo** A)

$$\xi_i - \alpha_i \leqslant x_i \leqslant \xi_i + \beta_i \qquad i = 1, 2, \cdots, p$$

Sea $n(\Xi^*)$ el máximo de los números $n(\Xi_1), n(\Xi_2), \cdots, n(\Xi_p)$ entonces para $n \geqslant n(\Xi^*)$ tenemos en todos estos intervalos $k_n(x) > \frac{10N}{\delta}$.

La contribución de estos intervalos a la integral $\int_{-\infty}^{\infty} k_{n(\Xi^*)}(x)\,dx$ es mayor que $\frac{4\delta}{10}\,\frac{10N}{\delta} = 4N$ lo que contradice que el valor total de la integral es menor que N.

Ahora podemos **seguir** con la prueba del teorema de la integral de Cauchy como usual.

H sea el conjunto formado por C y su interior. Dado cualquier ε positivo, se da un δ (con $0 < \delta < 1$) tal que $|F(z) - F(z_0)| < \varepsilon$ siempre y cuando $|z - z_0| < 2\delta$ $(z, z_0 \text{ en } H)$ en **virtud** de la continuidad uniforme.

Como acabamos de comprobar, existe un x_0 tal que ninguna de las líneas rectas $x = x_0 + j\delta$ $(j = 0, 1, 2, \cdots, -1, -2, \cdots)$ tiene un número infinito de puntos en común con **C**.

De la misma manera existe un y_0 tal que ninguna de las líneas rectas $y = y_0 + j\delta$ tiene un número infinito de puntos en común con C. Los dos sistemas de lineas rectas dividen el inte -

rior de C en un número finito de recintos, teniendo cada recinto como frontera una trayectoria cerrada simple: $C_1, C_2, \ldots, C_s$

Si orientamos todas las curvas en sentido positivo, tendremos $\int_C F(z)\,dz = \sum_{i=1}^{s} \int_{C_i} F(z)\,dz$

Suponemos que las primeras q curvas contienen partes de la curva C; entonces las demás son cuadrados, completamente dentro de C. Para tales cuadrados ya vale el teorema

$\int_{C_i} F(z)\,dz = 0$, de manera que tenemos:

$$\int_C F(z)\,dz = \sum_{i=1}^{q} \int_{C_i} F(z)\,dz$$

Sean ℓ y ℓ_i las longitudes de C y de las curvas C_i respectivamente, entonces

$\sum_{i=1}^{q} \ell_i - \ell \leq 4\delta\nu$ siendo ν el número de los cuadrados (formados por los dos sistemas de líneas rectas) que contienen puntos de C.

Un segmento de C con longitud δ no puede tener puntos en común con cinco o mas cuadrados. (Entre cinco cuadrados siempre hay dos con la propiedad: La distancia de cuaquier punto del uno a cualquier punto del otro es mayor que δ).

Por lo tanto un segmento con longitud menor que δ puede tener puntos en común con a lo máximo cuatro cuadrados.

Se puede subdividir la curva en $[\ell/\delta]+1$ segmentos, cada uno con longitud menor que δ . Pues $\nu \leq 4([\frac{\ell}{\delta}]+1) \leq \frac{4\ell}{\delta}+4$ y

$$\sum_{i=1}^{q} \ell_i \leq \ell + 4\delta\left(\frac{4\ell}{\delta}+4\right) = 17\ell + 16\delta \leq 17\ell + 16$$

Cada uno de los puntos de C_i, tienen distancia menor o igual $\delta\sqrt{2} < 2\delta$ Por tanto, si seleccionamos sobre C_i un punto z_i cualquiera (para cada i), entonces para cada z sobre C tenemos:

$$|z - z_i| < 2\delta \qquad |F(z) - F(z_i)| < \varepsilon \quad \text{pues}$$

$$\left| \int_{C_i} (F(z) - F(z_i))\, dz \right| \leq \varepsilon\, l_i \qquad y$$

$$\left| \sum_{i=1}^{8} \int_{C_i} (F(z) - F(z_i))\, dz \right| \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{8} l_i \leqslant \varepsilon(17\, l + 16)$$

Al otro lado $\left(\text{usando } \int_{C_i} F(z_i)\, dz = F(z_i) \int_{C_i} dz = 0 \right)$ tenemos:

$$\left| \sum_{i=1}^{8} \int_{C_i} (F(z) - F(z_i))\, dz \right| = \left| \sum_{i=1}^{8} \int_{C_i} F(z)\, dz \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{s} \int_{C_i} F(z) dz \right| = \left| \int_C F(z)\, dz \right|$$

Por lo tanto

$$\left| \int_C F(z)\, dz \right| < \varepsilon\,(17\, l + 16) \quad \text{para cada } \varepsilon \text{ positivo.}$$

Entonces

$$\int_C F(z)\, dz = 0$$

Bibliografía.

1) Hans Heilbron: Zu dem Integralsatz von Cauchy.
Mathematisches Zeitschrift, 37, página 37.

2) Theodor Estermann: Ueber die totale Variation einer stetigen Funktion und den Cauchyschen Integralsatz.
Mathematisches Zeitschrift, 37, páginas 556-560.