Programación Polinomial

Por: CLAUDE WILLARD (UNESCO)

1) Se trata de la optimación de una función polinomial cuyas variables son sometidas a restricción lineal y son positivas.

Como en realidad, en los problemas concretos que se presentan, las funciones encontradas son a menudo del tipo el más general, pero como una función cualquiera puede siempre ser aproximada por un polinomio , el tema de la programación polinomial me pareció susceptible en numerosas aplicaciones.

Además, a mi conocimiento, no ha sido tratado hasta ahora. El método de Lagrange puede aplicarse en este caso tambien, pero, aunque nos da un resultado teorico valido, conduce a cálculos muy largos y complejos.

Nuestro método consiste a utilizar la estructura especial de nuestro problema que tiene restricciones lineales. Eso nos permite utilizar el procedimiento de sustitución y luego alcanzar a un sistema lineal teniendo menos variables y de una estructura más sencilla que el sistema de Lagrange.

Definición I) $$\lambda_{opt} = \sum_{\substack{i=0 \\ k=0}}^{\substack{k=\ell \\ n}} c_{ik}\, x_i^k$$

$$A x \lesseqgtr b \qquad A = (p \times n)$$

$$b = (p \times \ell)$$

$$x_i \geqslant 0 \qquad x = (n \times \ell)$$

Nota II = I $$\lambda_{opt} = \sum_{\substack{i=1 \\ k=0}}^{\substack{i=n \\ \ell}} c_{ik}\, x_i^k$$

$$Ax = b$$

(Teoría de variables artificiales)

$$x \geqslant 0$$

Solución: $A_1 = (P \times P)$ $\quad A_2 = (P \times (n-P))$

$x_1 = (1 \times P)$ $\quad x_2 = ((n-P) \times 1)$

$$(A_1, A_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 = b$$

$$A^{-1} A_1 x_1 = A^{-1} b - A^{-1} A_2 x_2$$

$$x_1 = A^{-1} b - A^{-1} A_2 x_2$$

Sea $\quad x_i = \alpha_i - \sum_{j=n-p}^{n} \beta_{ji}\, x_j \qquad (i = 1, 2, \cdots, P)$

$$\Rightarrow \lambda_{opt} = \sum_{\substack{i=1 \\ k=0}}^{\substack{i=P \\ k=\ell}} C_{ik} \left[\alpha_i - \sum_{j=n-p}^{n} \beta_{ji}\, x_j\right]^k + \sum_{\substack{i=P+1 \\ k=0}}^{\substack{i=n \\ k=\ell}} C_{ik}\, x_i^k$$

como $\lambda_{opt} \Rightarrow d\lambda = 0 \Rightarrow \lambda'_{x_j} = 0$ para $j = 1, 2, \cdots, n-p$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ k=0}}^{\substack{i=P \\ k=\ell}} C_{ik} \left[\alpha_i - \sum_{j=n-p}^{n} \beta_{ji}\, x_j\right]^{k-1} - k\beta_{ji} + C_{jk}\, k\, x_j^{k-1} = 0$$

eso nos da un sistema de n - p ecuaciones con n - p incógnitas. En lugar del sistema de orden (2n + p) de Lagrange.

Practicamente se tratará de buscar las soluciones reales positivas de un polinomio cualquiera por los métodos del cálculo número ico , y luego proceder por iteraciones sucesivas. Vamos a presentar como aplicación de este método el caso de la programación cuadratica de manera a aclarar una dificultad relativa al caso de degeneración:

$$(I) \qquad \lambda_{opt} = \sum_{\substack{i=1 \\ k=0}}^{\substack{i=n \\ k=2}} C_{ik}\, x_i^k \qquad \begin{matrix} Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{matrix}$$

NOTA: En (1) representa en realidad un polinomio del segundo grado pero es fácil mostrar que el caso más general de la programación cuadratica se reduce a este tipo de función objetiva.

$$\sum_{\substack{i=1\\k=0}}^{\substack{2\\i=n}} -2\beta_{ji}\, C_{ik}\left[\alpha_i - \sum_{j=n-p}^{n} \beta_{ji}\, x_j\right] + 2\, C_{jk}\, x_j = 0$$

para j n - p, n - p + 1, $\sim$ n.

lo que nos da n - p ecuaciones lineales para determinar n - p incógnitas x_j.

1) Si los x_j obtenidos son positivas, estamos al óptimo y el problema es resuelto.

2) Si hay un $x_j = 0$ significa que el óptimo encontrado no cumple todas las restricciones. Buscamos otra solución haciendo $x_j = 0$ (j=1,2,...h) hasta que se encuentre el óptimo con el método (1).

3) Si no se encuentra el óptimo con n - p + 1 variables nulas, el problema se complica, pues no se aplica más el procedimiento de sustitución y hubiera que calcular c_h^p sistema de Kramer y los valores de A correspondientes y escoger el óptimo. Felizmente en este caso es posible utilizar un método simplex para alcanzar más rapidamente ai óptimo.

ARGORITMO

1) Escogemos una base:

$$\sum_{1}^{p} P_i\, x_i = b$$

implica

$$\lambda_0 = \sum_{\substack{i=1\\k=0}}^{\substack{2\\i=p}} C_{ik}\, x_i^k$$

2) Mejoramiento de la base

$$\sum_{1}^{p} P_i\, x_i + \theta\, P_j - \theta\, P_j = b \qquad j = p+1,\ p+2,\ \cdots,\ n$$

$$P_j = \sum_{1}^{p} \delta_{ji}\, P_i$$

$$\sum_{1}^{p} P_i \left[x_i - \delta_{ji}\,\theta\right] + \theta\, P_j = b$$

$$\frac{x_i}{\delta_{ji}}\,, \quad x_i = 1, 2, \cdots, P$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{i=P} \sum_{k=0}^{k=2} \left[C_{ik} (x_i - \delta_{ji}\,\theta)^k + C_{jk}\,\theta^k \right]$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{P} C_{i0} + C_{i1}[x_i - \delta_{ji}\theta] + C_{i2}[x_i - \delta_{ji}\,\theta]^2 + C_{j0}$$

$$+ C_{j1}\theta + C_{j2}\,\theta = \sum_{i=1}^{P} (C_{i0} + C_{i1}\,x_i + C_{i2}\,x_i^2)$$

$$+ C_{j0} - \left[C_{i1}\,\delta_{j1} + 2\,C_{i2}\,\delta_{j1}\,x_i + C_{j1} \right] \theta + (C_{i2}\,\delta_{j1}^2 + C_{j2})\,\theta^2$$

$$\lambda - \lambda_0 = C_{j0} - \theta \left[C_{j1} + \delta_{j1} \sum_{1}^{P} (C_{i1} + 2\,C_{i2}\,x_i) \right]$$

$$+ \theta^2 \left[C_{j2} + C_{i2}\,\delta + \delta_{j1}^2 \sum_{1}^{P} C_{i2} \right]$$

hay que buscar el máximo de $\lambda - \lambda_0 > 0$ positivo para un maximo, negativo para un mínimo y luego proceder por iteración.