UN CRITERIO SOBRE LA CONVERGENCIA DE LA INTEGRAL IMPROPIA

Por

YU TAKEUCHI

(Dpto. de Matemáticas.U.N.)

1. INTRODUCCION

Sea $\{f(x)\} = S$ el conjunto de las funciones contínuas y crecientes tales que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Se trata de estudiar la estructura de la convergencia de la integral impropia

$$\int^{\infty} \frac{dx}{f(x)} \tag{1}$$

Si $f(x)$, $g(x) \in S$, entonces las integrales $\int^{\infty}(1/f(x))\,dx$ y $\int^{\infty}(1/g(x))\,dx$ convergen o divergen simultáneamente si

$$f(x) = O(g(x)) \ , \quad g(x) = O(f(x)) \tag{2}$$

Por lo tanto es conveniente establecer una equivalencia de funciones de acuardo con la condición (2).

DEFINICION 1

i) Si $f(x)$, $g(x) (\in S)$ satisfacen la condición (2), entonces $f(x)$ es equivalente a $g(x)$ y se escribe:

$$f(x) \sim g(x) \tag{3}$$

Nota. Esta definición de la equivalencia es distinta a la de la equivalencia para el desarrollo asintótico, es decir,

$$f \sim g \quad \text{si} \quad f - g = o(f) \quad [(2)]$$

ii) Si

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \tag{4}$$

entonces $f(x)$ es MUCHO MAYOR que $g(x)$ y se nota

$$f(x) \gg g(x) \quad \text{o} \quad g(x) \ll f(x) \tag{5}$$

Nota: g es despreciable delante de f. [(2)]

El siguiente teorema es evidente. [(1),(2),(3)]

TEOREMA 1

i) Si $f \sim g$, entonces $\int^{\infty}(1/f)\,dx$ y $\int^{\infty}(1/g)\,dx$ convergen o divergen simultáneamente.

ii) Si $f \gg g$, entonces la convergencia de $\int^{\infty}(1/g)\,dx$ implica la convergencia de $\int^{\infty}(1/f)\,dx$, y la divergencia de $\int^{\infty}(1/f)\,dx$ implica la divergencia de la otra.

TEOREMA 2

i) $f \sim c\,f$, (c es una constante).

ii) Si $f \sim g$ y $g \sim h$ entonces $f \sim h$.

iii) Si $f \sim g$ entonces $g \sim f$.

iv) Si $f \gg g$ y $g \gg h$ entonces $f \gg h$.

v) Si $f \gg g$ entonces $f.h \gg g.h$.

vi) Si $f \gg g$ y $h \gg k$ entonces $f + h \gg g + k$.

Demostración:

i),ii),iii),iv),v) son evidentes.

vi) Si $f \gg g$ y $h \gg k$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{k(x)} = \infty$$

es decir, dada M existe x_o tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} > M \qquad \frac{h(x)}{k(x)} > M \quad \text{para} \quad x > x_o$$

luego, $f(x) + h(x) > M(\ g(x) + k(x)\ )$, o bien ,

$$\frac{f(x) + h(x)}{g(x) + k(x)} > M$$

S es un conjunto semiordenado con la DESIGUALDAD " $\gg$ ", pero no es un conjunto perfectamente ordenado ya que existen f, g no-comparables.

Ejemplo:

$$f(x) = n! + (\ x - n!\ )^2 \quad \text{para} \quad n! \leq x \leq n! + \sqrt{n\ .\ n!}$$

$$f(x) = (n + 1)! \quad \text{para} \quad n! + \sqrt{n\ .\ n!} \leq x \leq (n + 1)!$$

$$(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$$

$g(x) = x$

Evidentemente $f(x)$, $g(x)$ pertenecen a S y, además,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(n!)}{g(n!)} = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(n! + \sqrt{n\ .\ n!})}{g(n! + \sqrt{n\ .\ n!})} = \lim_{x\to\infty} \frac{(n + 1)!}{n! + \sqrt{n\ .\ n!}} = \infty$$

es decir, f y g no son comparables de acuerdo con la definición 1.

Como la convergencia de la integral impropia $\int^{\infty}(1/f(x))\,dx$ es equivalente a la convergencia de la serie $\sum^{\infty} 1/f(x)$, basta saber los valores de la función f(x) en x=entero para el estudio de la convergencia de la integral impropia, por lo tanto, se puede suponer que f(x) es derivable (o infinitas veces derivable,o regular a trozos) ya que modificando los valores de f(x),(x = entero), siempre se obtiene una nueva función derivable.En las secciones siguientes se supone que todas las funciones son <u>regulares a trozos</u> (la derivada es contínua exceptuando un número finito de puntos en el intervalo finito).

2. EXTREMO SUPERIOR

Sea $$\left\{ g(x) \ , \ f_n(x) \ , \ n = 1, 2, 3, \ldots \right\} \tag{6}$$

una sucesión de funciones de $\mathcal{S}$ tales que

$$f_1 \ll f_2 \ll \ldots \ll f_n \ll f_{n+1} \ll \ldots \ll g \tag{7}$$

es decir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f_n(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{(para todo n)} \tag{8}$$

De (8) , existe una sucesión creciente $\{a_n\}$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} f_k(x) < g(x) \\ f_k(x) > f_h(x) \ ,(h = 1, 2, \ldots, k-1) \end{array}\right\} \text{cuando } x > a_k \tag{9}$$

Ahora se define una nueva sucesión de funciones $\left\{ f_k^o(x) \right\}$ de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{ll} f_k^o(x) = \text{Min}\ (\ g(x)\ ,\ f\ (a_k)\ )\ , & \text{cuando} \quad x \le a_k \\ f_k^o(x) = f_k(x) \ , & \text{cuando} \quad x \ge a_k \end{array}\right\} \tag{10}$$

Evidentemente

$$f_k^o \in S \ , \quad f_k^o \sim f_k \quad y$$

$$f_k^o \ll f_{k+1}^o \ , \quad f_k^o < g \qquad , \text{(para todo k.)}$$

Además, de acuerdo con la forma como $f_k^o(x)$ fué construída, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} f_k^o(x) \leq f_{k+1}^o(x) \\ f_k^o\ (x) \leq g(x) \end{array}\right\} \qquad (11)$$

(para todo k y x.)

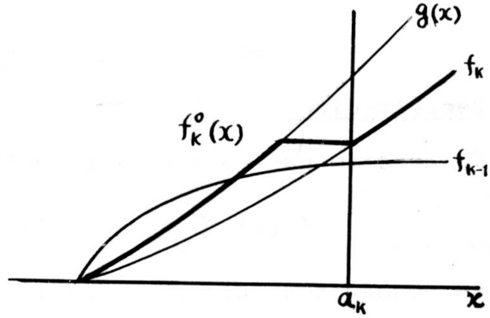

Fig. 1

De (11), la sucesión $\left\{ f_k^o(x),\ k = 1,2,\ \ldots \right\}$ converge a una función $g^o(x)$;

$$\lim_{K \to \infty} f_K^o(x) = g^o(x) \qquad (12)$$

Esta función satisface las siguientes propiedades:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{i)} & f_K^o(x) \leq g^o(x) \leq g(x) & \text{para todo } x \\ \text{ii)} & f_K^o \ll g^o & \text{para todo } k \\ \text{iii)} & g^o(x) = O(\ g(x)\ ) & \end{array}\right\} \qquad (13)$$

<u>Demostración:</u>

i),iii) son evidentes.

ii). De i) se tiene;

$$f_K^o(x) \leq f_{K+1}^o(x) \leq g^o(x) \qquad \text{(para todo k)}$$

entonces

$$\frac{g^o(x)}{f_K^o(x)} \geq \frac{f_{K+1}^o(x)}{f_K^o(x)} \longrightarrow \infty \qquad (\ x \longrightarrow \infty\ ,\ k \text{ fijo})$$

es decir $f_k^{\circ} \ll g^{\circ}$ (para todo k.)

TEOREMA 3

Dada la sucesión (6), existe una función $h(x) \in S$ tal que

$$h \ll g \quad y \quad f_k \ll h \quad \text{(para todo k.)}$$

Demostración:

De acuerdo con la discusión anterior, se puede suponer que

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq g(x) \quad \text{, para todo k y x.} \tag{14}$$

Se puede construir una sucesión creciente $\{a_n\}$ tal que

$$x \geq a_n \quad \text{implica} \quad g(x) / f_{n+1}(x) \geq n \tag{15}$$

ya que $g \gg f_{n+1}$. Se define una función $h(x)$ como sigue:

$$h(x) = f_n(x) + \frac{x - a_n}{a_{n+1} - a_n} \left\{ f_{n+1}(x) - f_n(x) \right\} \quad (a_n \leq x \leq a_{n+1}) \tag{16}$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Se obtiene:

$$h'(x) = \frac{a_{n+1} - x}{a_{n+1} - a_n} f_n'(x) + \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \left\{ f_{n+1}(x) - f_n(x) \right\} + \frac{x - a_n}{a_{n+1} - a_n} f_{n+1}'(x) > 0$$

es decir, $h(x)$ es creciente, o bien, $h(x) \in S$

Evidentemente

$$f_n(x) \leq h(x) \leq f_{n+1}(x) \qquad \text{cuando} \quad x \in [a_n, a_{n+1}]$$

$$f_{n+1}(x) \leq h(x) \leq f_{n+2}(x) \qquad \text{cuando} \quad x \in [a_{n+1}, a_{n+2}]$$

luego, $$\frac{h(x)}{f_n(x)} > \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \qquad \text{si} \quad x \geq a_{n+1}$$

entonces $h \gg f_n$ para todo n.

También,

$$\frac{g(x)}{h(x)} > \frac{g(x)}{f_{n+1}(x)} \geq n \quad , \quad \text{si} \quad x \in [a_n , a_{n+1}]$$

luego

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \infty \qquad , \text{ es decir }, \quad g \gg h \quad .$$

Este teorema nos indica que la sucesión creciente y acotada <u>NO</u> tiende a un límite de acuerdo con la"<u>desigualdad</u>" $\ll$; <u>la ausencia del extremo superior!!!</u> .

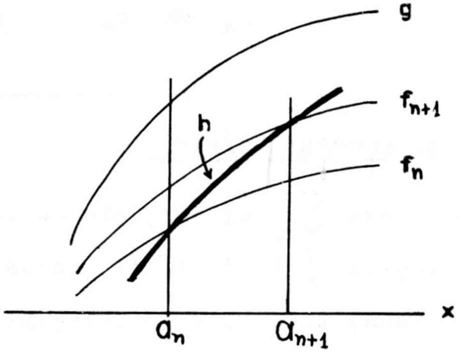

Fig. 2

<u>Ejemplo 2</u>

$$\left.\begin{aligned} & f_k(x) = x^{1-\frac{1}{k}} \\ & \lim_{k \to \infty} f_k(x) = g(x) = x \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Se define $h_\lambda(x)$ paramétricamente como sigue:

$$y = h_\lambda(x) \; ; \left\{ \begin{aligned} & x = t^{t+\lambda} \quad , \; t \in (0,\infty) \\ & y = t^t - 1 \; , (\lambda > 0) \end{aligned} \right. \qquad (18)$$

entonces

$$h'_\lambda(x) = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{t^t \; (\log t + 1)}{t^{t+\lambda}(\log t + 1 + (\lambda/t))} = \frac{\log t + 1}{\log t + 1 + (\lambda/t)} \; t^{-\lambda}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{h_\lambda(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{g'(x)}{h'_\lambda(x)} = \lim_{t \to \infty} \frac{\log t + 1 + (\lambda/t)}{\log t + 1} \, t^\lambda = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h_\lambda(x)}{f_k(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{h'_\lambda(x)}{f'_k(x)} = \lim_{t\to\infty} \frac{(\log t + 1)\, t^{-\lambda}}{(\log t+1+(\lambda/t))(1-(1/k))t^{-\left(\frac{t+\lambda}{k}\right)}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(\log t + 1)\ t^{\left(\frac{t+\lambda}{k}-\lambda\right)}}{(\log t + 1 + (\lambda/k))(1-(1/k))} = \infty$$

es decir,

$$f_k \ll h_\lambda \ll g \quad \text{, para todo } k \text{ y } \lambda .$$

También

$$h_\lambda \ll h_\mu \qquad \text{si} \qquad \lambda > \mu .$$

---

3. <u>ELEMENTO</u> <u>MAXIMAL</u>

Sea S_c el conjunto de las funciones de S tales que la integral $\int^\infty (1/f(x))\,dx$ converge y S_d el conjunto de las funciones tales que la integral $\int^\infty (1/f(x))\,dx$ diverge, entonces , evidentemente, se obtiene

$$S = S_c \cup S_d \ , \quad S_c \cap S_d = \emptyset \tag{19}$$

Además, cualquier función de S_c es <u>MUCHO</u> <u>MAYOR</u> que cualquier elemento de S_d . ($S_c \gg S_d$).

El siguiente teorema nos dice que <u>NO</u> existe el elemento <u>MAXIMAL</u> de S_d ; la DESIGUALDAD " $\gg$ " no admite la existencia del <u>extremo</u> <u>superior</u> del conjunto <u>ACOTADO</u> S_d.

<u>TEOREMA 4</u>

i) Si $f \in S_d$, entonces existe $g \in S_d$ tal que $f \ll g$.

ii) Si $f \in S_c$, entonces existe $h \in S_c$ tal que $h \ll f$.

Demostración:

i) Si $f \in S_d$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 / f(n) = \infty \tag{20}$$

Por lo tanto existe N(1) , N(2) , N(3) , ... ,tales que

$$\sum_{k=1}^{N(1)} 1 / f(k) \geq 1$$

$$\sum_{k=N(i)+1}^{N(i+1)} 1 / f(k) \geq 1 \quad , (i=1, 2, 3, \ldots)$$

Se define una función $g(x)$ como sigue:

$$g(x) = f(x) \qquad \text{si} \quad x \leq N(1)$$

$$g(x) = (i + 1) f(x) \qquad \text{si} \quad N(i) + 1 \leq x \leq N(i + 1)$$

$$g(x) = i + x - N(i) \; f(x) \quad \text{si} \quad N(i) \leq x \leq N(i) + 1$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots)$$

Entonces se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{g(k)} = \sum_{k=1}^{N(1)} \frac{1}{g(k)} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=N(i)+1}^{N(i+1)} \frac{1}{g(k)} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N(1)} \frac{1}{f(k)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i+1} \sum_{k=N(i)+1}^{N(i+1)} \frac{1}{f(k)} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

luego,la integral $\int^{\infty} (1/g(x))\, dx$ diverge a ∞ .

Evidentemente

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{i \to \infty} (i + 1) = \infty$$

ii) Si $f(x) \in S_c$, entonces

$$\sum_{n=1}^{1} \frac{1}{f(n)} = A \; (< \infty) .$$

Ahora se determinan N(1), N(2), N(3), ... , en la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N(1)} \frac{1}{f(k)} = a_1 > A/2 \\
&\sum_{k=N(1)+1}^{N(2)} \frac{1}{f(k)} = a_2 > (A - a_1)/2 \\
&\text{en general} \\
&\sum_{k=N(i)+1}^{N(i+1)} \frac{1}{f(k)} = a_{i+1} \geq (A - a_1 - a_2 - \dots - a_i)/2
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Se define la función h(x) como sigue:

$$h(x) = \frac{2}{3} f(x) \qquad , \text{ para } x \leq N(1)$$

$$h(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^i \left[1 - \frac{1}{3}(x - N(i)) \right] f(x) \quad , \text{para } N(i) \leq x \leq N(i) + 1$$

$$h(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{i+1} f(x) \qquad , \text{ para } N(i) + 1 \leq x \leq N(i+1)$$

Entonces se obtiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{g(k)} = \sum_{k=1}^{N(1)} \frac{1}{g(k)} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=N(i+1)} \frac{1}{g(k)} \right)$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{N(1)} \frac{1}{f(k)} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{i+1} \sum_{k=N(i)+1}^{N(i+1)} \frac{1}{f(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^i a_i$$

De (21) se puede demostrar facilmente la siguiente desigualdad:

$$a_{k+1} \leq A / 2^k$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^i a_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^i (A / 2^{i-1}) = 2A \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i < \infty$$

Por lo tanto

$$\int^{\infty} (1/g(x))\,dx \text{ converge y, además, } g \ll f$$

Ejemplo 3

$$x \ll x\log x \ll x \log x \log\log x \ll \dots \qquad (22)$$

pertenece a S_d. En general, si $f(x) \in S_d$ entonces $x\,f(\log x) \in S_d$, ya que

$$\int^{B} \frac{dx}{f(x)} = \int^{e^B} \frac{dx}{x\,f(\log x)} \longrightarrow \infty \qquad (B \longrightarrow \infty)$$

Como el ejemplo 3, sí se puede demostrar la siguiente relación:

$$f(x) \ll x\,f(\log x) \qquad (23)$$

este es un método práctico para obtener otra función MUCHO MAYOR que f(x) que pertenece a S_d. Pero si la sucesión de funciones (22) convergiera a una función límite, la cual ya no cumpliría la DESIGUALDAD (23).

En las siguientes secciones se va a estudiar la substitución

$$f(x) \longrightarrow x\,f(\log(1+x)).$$

Nota: Para evitar la dificultad en el punto singular de la función logarítmica, es conveniente tomar log(1 + x) en lugar de log x.

Ejemplo 4

Si $f \in S_d$ entonces $g(x) = f(x)\int^{x} \frac{dt}{f(t)}$ pertenece a S_d y, además $g \gg f$.

Demostración:

Sea $y = \int^{x} \frac{dt}{f(t)}$, entonces $y \longrightarrow \infty$ cuando $x \longrightarrow \infty$.

Entonces

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int \frac{dx}{f(x)\cdot \int^{x} \frac{dt}{f(t)}} = \int \frac{dy}{y} = \log y \longrightarrow \infty$$

$$(x \longrightarrow \infty)$$

Además

$$g'(x) = f'(x) \int^{x} \frac{dt}{f(t)} + 1 > 0$$

es decir

$$g(x) \in \mathcal{S}_d \ .$$

Evidentemente $g \gg f$ ya que

$$g / f = \int^{x} \frac{dt}{f(t)} \longrightarrow \infty \qquad (x \longrightarrow \infty)$$

Ejemplo 5

Si $f \in \mathcal{S}_c$ entonces

$$g(x) = f(x) \left\{ \int_{x}^{\infty} \frac{dt}{f(t)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{pertenece a } \mathcal{S}_c \text{ y } g \ll f \ .$$

4. INDICE DE LA CONVERGENCIA

Es bien conocido que los límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} \ , \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(n)}$$

sirven para saber la convergencia de la integral $\int^{\infty} (1/f(x))\,dx$, pero muchas veces esos límites son iguales a 1, luego esos criterios son impotentes.

En ésta sección se va a ver otro criterio de la convergencia de la integral.

TEOREMA 5

Si $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x\, f'(x)}{f(x)} = r > 1$ entonces $f \in S_c$

Si $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x\, f'(x)}{f(x)} = r < 1$ entonces $f \in S_d$

Demostración:

Suponemos que $r > 1$, entonces para $\varepsilon = \dfrac{r-1}{2}$ existe x_0 tal que

$$x > x_0 \text{ implica } 1+\varepsilon = r-\varepsilon < \frac{x\, f'(x)}{f(x)} < r+\varepsilon$$

o bien,

$$\frac{df}{dx} > (1+\varepsilon)\frac{f(x)}{x} \qquad (24)$$

Se toma una función $\phi(x)$ como sigue:

$$\frac{d\phi}{dx} = (1+\varepsilon)\frac{\phi(x)}{x}, \quad \phi(x_0) = f(x_0) \qquad (25)$$

es decir,

$$\phi(x) = \frac{f(x_0)}{x_0^{1+\varepsilon}}\, x^{1+\varepsilon} \qquad (26)$$

De (24) y (25), existe una vecindad de x_0 en donde se tiene:

$$\phi(x) < f(x)$$

Si existe un punto x ($> x_0$) en donde

$$\phi(x) > f(x) \qquad (27)$$

entonces, por la continuidad de $f(x)$ y $\phi(x)$ existe x_1 tal que

$$\left.\begin{array}{l} x < x_1 \text{ si } f(x) > \phi(x) \\ \\ \end{array}\right\} \qquad (28)$$

$$\left.\begin{array}{lll} x = x_1 & \text{si} & f(x_1) = \phi(x_1) \\ x > x_1 & \text{si} & f(x) < \phi(x) \end{array}\right\} \quad (28)$$

o bién

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = \phi(x_1) \\ f'(x_1) < \phi'(x_1) \end{array}\right\} \quad (29)$$

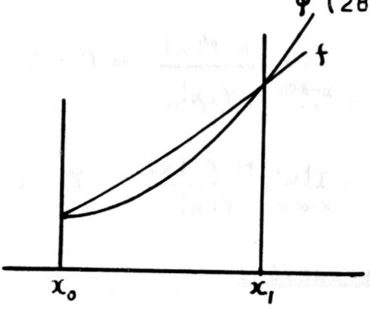

Fig. 3

Pero de (24) y (25) se obtiene:

$$f'(x_1) > (1+\varepsilon)\, f(x_1)/x_1 = (1+\varepsilon)\,\phi(x_1)/x_1 = \phi'(x_1)$$

la cual contradice a (29). Por lo tanto, para todo $x > x_0$ se tiene:

$$\phi(x) < f(x)$$

es decir,

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{x_0^{1+\varepsilon}} \cdot x^{1+\varepsilon}$$

Como $x^{1+\varepsilon}$ pertenece a S_c, entonces $f(x) \in S_c$.

De la misma manera se puede demostrar fácilmente la segunda parte del teorema.

Ejemplo 6

i) $f(x) = x \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \dfrac{x\, f'(x)}{f(x)} = 1 \quad , \quad x \in S_d$

ii) $f(x) = x(\log x)^2 \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \dfrac{x\, f'(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x\{(\log x)^2 + 2 \log x\}}{x\,(\log x)^2}$

$$= 1$$

$$x\,(\log x)^2 \in S_c \; .$$

TEOREMA 6

Sea $$\gamma_f = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x\, f(\log x)}$$

Si $\gamma_f > 1$ entonces $f \in S_c$

Si $\gamma_f < 1$ entonces $f \in S_d$

Demostración:

Si $\gamma_f > 1$ entonces existe x_o tal que $\left(\mathcal{E} = \frac{\gamma_f - 1}{2} \right)$

$$x \geq x_o \text{ implica } \frac{f(x)}{x\, f(\log x)} > \gamma_f - \mathcal{E} = 1 + \mathcal{E} \tag{30}$$

Sean

$$a_o = 0\ , a_1 = 1\ , a_2 = e, \ldots, a_n = e^{a_{n-1}}, \ldots \tag{31}$$

Evidentemente $\{a_n\}$ es creciente y tiende a ∞. Para $a_n > x_o$,

se obtiene:

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{dx}{f(x)} \leq \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{dx}{(1+\mathcal{E})x f(\log x)} = \frac{1}{1+\mathcal{E}} \int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{dx}{f(x)}$$

Por lo tanto

$$\int_{a_{n-1}}^{\infty} \frac{dx}{f(x)} \leq \int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{dx}{f(x)} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{1+\mathcal{E}} + \frac{1}{(1+\mathcal{E})^2} + \cdots \right\} < \infty$$

es decir,

$$f(x) \in S_c$$

Por el procedimiento análogo al anterior, se puede demostrar la segunda parte del teorema.

Nota:

Si $\frac{f(x)}{x\, f(\log x)} = 1$, evidentemente $f \in S_d$

TEOREMA 7

i) Si $\gamma_f > \gamma_g$ entonces $f \succ g$

ii) Si $f \sim g$ entonces $\gamma_f = \gamma_g$

Demostración:

i) $\gamma_f > \gamma_g$. Existen α y β tales que

$$\gamma_f > \alpha > \beta > \gamma_g$$

Existe x_0 tal que $x > x_0$ implica:

$$\frac{f(x)}{x\, f(\log x)} > \alpha \quad , \quad \frac{g(x)}{x\, g(\log x)} < \beta$$

Sean

$$x_1 = e^{x_0} \;,\; x_2 = e^{x_1} \;,\; \ldots \;,\; x_n = e^{x_{n-1}}, \;\ldots \tag{32}$$

$$M = \underset{[\log x_0, x_0]}{\mathrm{Max}} \frac{g(x)}{f(x)} \quad , \quad h(x) = M \cdot f(x) \tag{33}$$

Entonces:

$$\frac{h(x)}{x\, h(\log x)} = \frac{M\, f(x)}{x\, M\, f(\log x)} > \alpha \quad (\text{para } x > x_0) \tag{34}$$

Además, en $[\log x_0 \,,\, x_0]$:

$$h(x) \geq g(x) \quad , \text{ o bien }, \quad \frac{h(x)}{g(x)} \geq 1 \tag{35}$$

En el intervalo $[x_0 \,,\, x_1 = e^{x_0}]$ se tiene:

$$h(x) > \alpha x\, h(\log x) > \alpha\, x\, g(\log x) > \frac{\alpha}{\beta}\, g(x)$$

o bien , $$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

En general, en el intervalo $[\, x_{n-1} \,,\, x_n \,]$ se obtiene:

$$\frac{h(x)}{g(x)} > \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$$

luego

$$h(x) \gg g(x)$$

Por lo tanto se tiene que

$$f(x) \gg g(x) \,.$$

ii) Evidente .

$\gamma_f = \gamma_g$ no implica que $f \sim g$.

En realidad se pueden construir muchas funciones no-equivalentes que tienen el mismo valor de γ , como sigue:

Sea

$$\alpha(x) = \frac{f(x)}{x\, f(\log x)} \longrightarrow \gamma \qquad (x \longrightarrow \infty) \qquad (36)$$

Se toma una función $k(x)$, contínua y decreciente, tal que

$$k(x_{n-1}) = 1 + \frac{A}{n} \quad , \quad k(x_n) = 1 + \frac{A}{n+1}$$

donde $\{ x_n \}$ es la sucesión (32) y A es una constamte arbitraria.

Definimos una función $g(x)$ como sigue:

$$\left.\begin{aligned} &g(x) = f(x) && x \in [\log x_0 \,,\, x_0 \,] \\ &g(x) = k(x)\, \alpha(x) \cdot x \cdot g(\log x) && ,\ x \in [\, x_{n-1} ,\, x_n \,] \\ & && (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

En $[\, x_0 \,,\, x_1 \,]$ se tiene:

$$\begin{aligned} g(x) &= k(x)\, \alpha(x) \cdot x \cdot g(\log x) = k(x)\, \alpha(x)\; x\; f(\log x) \\ &= k(x)\, f(x) > \left(1 + \frac{A}{2}\right) f(x) \,. \end{aligned}$$

En $[\, x_{n-1} \,,\, x_n \,]$ se obtiene:

$$g(x) = k(x)\,\alpha(x)\; x\; g(\log x) \;>\; (1 + \frac{A}{n+1})\alpha(x)\; x\; g(\log x)$$

$$> (1 + \frac{A}{n+1})(1 + \frac{A}{n})\ldots(1 + \frac{A}{2})f(x)$$

Por lo tanto se tiene

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{g(x)}{f(x)} > (1 + \dfrac{A}{2})(1 + \dfrac{A}{3}) \ldots (1 + \dfrac{A}{n+1}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{en } [x_{n-1} \,,\, x_n] \end{array}\right\} \quad (38)$$

(38) implica que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty \qquad , \text{ o }, \qquad g \gg f$$

ya que el producto infinito

$$\prod_{k=2}^{\infty} (1 + \frac{A}{k})$$

diverge a ∞ .

Como $k(x)$ tiende a 1 cuando $x \to \infty$, de (37) se tiene que

$$\gamma_g = \gamma_f$$

<u>TEOREMA 8</u>

Si, para todo $x > x_o$,

$$\frac{f(x)}{x\; f(\log x)} = \frac{g(x)}{x\; g(\log x)}$$

entonces $f \sim g$

<u>Demostración:</u>

Sea $M = \max\limits_{[\log x_o,\, x_o]} \dfrac{g(x)}{f(x)}$, entonces se puede demostrar facilmente que (en la construcción anterior se puede tomar $A = 0$),

$$M\, f(x) > g(x) \qquad \text{para todo} \quad x > x_o .$$

Es decir,

$$g(x) = O(f(x))$$

De la misma manera se obtiene

$$f(x) = O(g(x)) .$$

Dada una función $\alpha(x)$, $x \in [x_o, \infty)$, se puede construir una función tal que

$$\frac{f(x)}{x\, f(\log x)} = \alpha(x) \tag{39}$$

sabiendo el valor de $f(x)$ en $[\log x_o , x_o]$. El teorema 8 nos garantiza que tal función es única en el sentido de la equivalencia, $\sim$, para cualquier valor de $f(x)$ en $[\log x_o , x_o]$. Evidentemente $\alpha(x)$ debe satisfacer alguna condición para que la función construída $f(x)$ sea creciente. De (39) se tiene:

$$f'(x) = \alpha'(x)\, x\, f(\log x) + \alpha(x)\, f(\log x) + \alpha(x) f'(\log x)$$

la condición suficiente para que $f'(x)$ sea positiva es:

$$\alpha'(x)\, x\, f(\log x) + \alpha(x)\, f(\log x) > 0$$

es decir $\quad \alpha'(x)\, x + \alpha(x) > 0$

Del procedimiento análogo al usado en la demostración del teorema 5, se tiene:

$$\alpha(x) > C e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{para} \quad x > x_o \tag{40}$$

Si $\alpha(x)$ es una función positiva que tiende a un número $\gamma \neq 0$ cuando $x \to \infty$, siempre existe x_o que cumple la desigualdad (40).

Sea $\alpha(x)$ una función decreciente tal que

$$\alpha(x_{n-1}) = 1 + \frac{A}{n}, \quad \alpha(x_n) = 1 + \frac{A}{n+1} \tag{41}$$

donde $\{x_n\}$ es la sucesión (32) y A es una constante. Tomamos una función $f(x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{x\, f(\log x)} = \alpha(x) \tag{42}$$

(Nota: Esta función existe y unica de la discusión anterior.)

Entonces

$$\left.\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{1}{f(x)}\, dx &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{\alpha(x)\; x\, f(\log x)} \\ &= \frac{1}{\alpha(\theta_n)} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{x\, f(\log x)} = \frac{1}{\alpha(\theta_n)} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{f(x)} \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

donde $\alpha(x_n) > \alpha(\theta_n) > \alpha(x_{n+1})$ (44)

Aplicando sucesivamente la relación (43) se tiene:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{1}{f(x)}\, dx = \frac{1}{\alpha(\theta_n)\, \alpha(\theta_{n-1}) \ldots \alpha(\theta_1)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{f(x)} \tag{45}$$

luego,

$$\int_{x_0}^{x_{n+1}} \frac{dx}{f(x)} = \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha(\theta_1) \ldots \alpha(\theta_k)} \right\} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{f(x)}$$

De (41) y (44) se obtiene:

$$\frac{1}{(1 + \frac{A}{3})(1 + \frac{A}{4}) \ldots (1 + \frac{A}{k+2})} < \frac{1}{\alpha(\theta_1)\, \alpha(\theta_2) \ldots \alpha(\theta_k)} <$$

$$< \frac{1}{\left(1+\frac{A}{2}\right)\left(1+\frac{A}{3}\right) \cdots \left(1+\frac{A}{k+1}\right)} \tag{46}$$

De (46) , la serie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha(\theta_1)\,\alpha(\theta_2) \cdots \alpha(\theta_k)}$$

converge ($n \longrightarrow \infty$) si $A > 1$ y la serie diverge si $A < 1$. Es decir,

$$\begin{aligned} &\text{Si} \quad A > 1 \quad , \quad f(x) \in S_c \\ &\text{Si} \quad A < 1 \quad , \quad f(x) \in S_d \end{aligned} \tag{47}$$

Además, evidentemente

$$\delta_f = 1 \tag{48}$$

.

REFERENCIAS

1.) T.M. Apostol: Mathematical Analysis

2.) N. Bourbaki : Fonctions D'une Variable Réelle

3.) E.W. Hobson: The Theory of Function of a Real Variable

4.) Teiji Takagui: Análisis Matemático

5.) Rey Pastor : Análisis Matemático

(Recibido Septiembre de 1965)