UN TEOREMA SOBRE ALGEBRA DE CONVOLUCION EN LA TEORIA DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Por: CLAUDE WILLARD (UNESCO, U.I.S.)

*

Teorema

Si p y q son enteros; $n = p + q$, $f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = f^{n-1}(0) = g^{n-1}(0) = 0$, entonces obtenemos:

$$f^{(p)}(t) * g^{(q)}(t) = f(t) * g^{(p+q)}(t) = f^{(q)}(t)\ g^{(p)}(t)$$

Demostración

a) Proposición I: $f'(t)*g(t) = f(t)\ g'(t)$ si $f(0) = g(0) = 0$

Demostración:

$$L[f'(t) * g(t)] = L[f'(t)]\ L[g(t)] = \{s\ L[f(t)] - f(0)\}\ L[g(t)]$$

$$= s\ L[f(t)]\ L[g(t)] = L[f(t)]\ s\ L(g(t)) = L[f(t)]\ L[g'(t)]$$

$$= L[f(t) * g'(t)]$$

y por consiguiente $f'(t)*g(t) = f(t)*g'(t)$ (Teorema de Lerch

b) Proposición II:

$$[f(t)*g(t)]' = f'(t)*g(t) \quad \text{si } f(0) = g(0) = 0$$

Demostración:

$$L[f(t) * g(t)]' = s\ L[f(t) * g(t)] - [f(t) * g(t)]_{t=0}$$

$$= s\ L[f(t)]\ L[g(t)] = L[f'(t)]\ L[g(t)]$$

$$= L[f'(t) * g(t)]$$

c) Proposición III:

$$[f(t)*g(t)]' = f'(t)*g(t) = f(t)*g'(t)$$

Consecuencia de la proposición I y la proposición II.

d) Proposición IV

$$[f(t)*g(t)]'' = f'(t)*g'(t) \quad \text{si} \quad f'(0) = g(0) = f(0) = 0$$

Demostración:

De la proposición III se obtiene :

$$[f(t)*g(t)]'' = \{[f(t)*g(t)]'\}' = \{f(t)*g'(t)\}' = f'(t)*g'(t)$$

e) Proposición V:

$$f'(t)*g'(t) = f''(t)*g(t) = g''(t)*f(t)$$

Demostración: De la Proposición I es evidente.

f) Proposición VI: Generalización por recurrencia:

Si $f^{(p)} * g^{(q)} = \{f*g\}^{(p+q)} = f^{(q)} * g^{(p)}$ entonces se tiene

$$f^{(p+1)} * g^{(q)} = \{f*g\}^{(p+q+1)} = f^{(q+1)} * g^{(p)}$$

La demostración es inmediata de la proposición I.

N.B. El teorema 1 es una generalización del teorema Willard (Prop. IV) el cual ha sido demostrado por otro método.

También la proposición II, llamada propiedad de traslación ha sido demostrado por Laurent Schwartz mediante métodos diferentes de los dos precedentes.