UN PROBLEMA DE VALORES PROPIOS

APLICADO A LA MECANICA CUANTICA

por

JOSE D. ARIAS P.

(Facultad deMatemáticas Universidad Nacional)

1. - Introducción.

Al estudiar el mundo de los cuantos aparecen dos problemas cuyas soluciones son muy conocidas:

(i) EL problema del POTENCIAL CUADRADO.

(ii) ELproblema del OSCILADOR ARMONICO.

El problema del potencial cuadrado consiste en encontrar los valores propios de la ecuación de SCHRöDINGER

$$(1) \qquad \frac{\hbar^2}{2m}\phi'' + \left\{ V(x) - E \right\}\phi = 0$$

para la función de potencial cuadrado V definida de la siguiente manera:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 \text{ (const.) para } x < -b \\ 0 \text{ para } |x| < b \\ V_0 \text{ para } x > b \end{cases} \qquad (b > 0)$$

El problema del oscilador armónico consiste en hallar los valores propios de la ecuación (1) para la función del potencial V definida así :

$$V(x) = -\frac{1}{2} k x^2 \quad (k = \text{const.})$$

para todo x.

En este trabajo se resuelve el problema para la función de potencial V definida de la siguiente manera:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} k b^2 \text{ para } x < -b \\ \frac{1}{2} k x^2 \text{ para } |x| < b \\ \frac{1}{2} k b^2 \text{ para } x > b \end{cases}$$

En el desarrollo del trabajo se observará que el problema es esencialmente distinto a los otros dos mencionados.

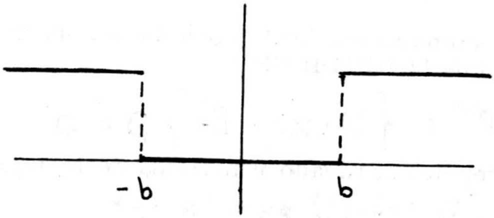
2.--SOLUCION AL PROBLEMA PROPUESTO.

Sea entonces

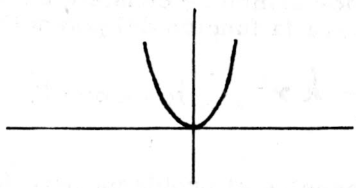
$$(1) \qquad \frac{\hbar^2}{2m}\phi'' + \left\{ V(x) - E \right\} \phi = 0$$

Se consideran trescasos para V :

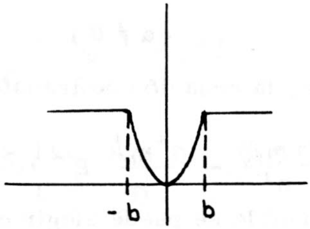
$$(2) \qquad \begin{array}{lll} (\text{i}) & V = \frac{1}{2} k b^2 & \text{para} \quad x < -b \\ (\text{ii}) & V = \frac{1}{2} k x^2 & \text{para} \quad |x| < b \\ (\text{iii}) & V = \frac{1}{2} k b^2 & \text{para} \quad x > b \end{array}$$



PROBLEMA DEL POTENCIAL CUADRADO



PROBLEMA DEL OSCILADOR ARMONICO



PROBLEMA PROPUESTO

Solución para el caso (i) :

Sea

(2) $$\beta = \left\{ \left(2m\left(\tfrac{1}{2}kb^2 - E\right)\right) \Big/ (h^2) \right\}$$

Las posibles soluciones de la ecuación (1), son

$$C_1 e^{\beta x} \quad \text{o} \quad D_1 e^{-\beta x}$$

en general, una combinación lineal de las dos.

Pero como $\phi \in L[-\infty, \infty]$, la única solución aceptable en este caso es

(4) $$\phi = Ce^{\beta x}$$ para $x < -b$

Solución para el caso (iii) :

Son posibles soluciones

$$C_2 e^{\beta x} \quad \text{o} \quad D_2 e^{-\beta x}$$

En general, $\phi = C_2 e^{\beta x} + D_2 e^{-\beta x}$; pero como $\phi \in L[-\infty, \infty]$ la única solución aceptable es:

(5) $$\phi = De^{\beta x}$$ para $x > b$

Solución para el caso (ii):

En este caso tenemos:

(6) $$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\phi = E\phi$$

Sea $x = a$ $(a \neq 0)$

(7) $\quad x = a \quad (a \neq 0)$

Con este cambio de variable, la ecuación se transforma en:

(8) $$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} + \left\{ \frac{E(2md)}{h^2} - \frac{a^4 mk}{h} \xi^2 \right\} \phi = 0$$

Al efectuar el cambio de variable se puede elegir convenientemente la constante a en tal forma que

(9) $$\frac{a^4 mk}{h^2} = 1 \quad ; \text{ es decir, que } \quad a^4 = \frac{h^2}{mk}$$

Sea, ahora:

(10) $$\lambda = \frac{2mE}{h^2}$$

Entonces la ecuación toma la forma:

(11) $$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\phi = 0$$

donde las condiciones físicas imponen que: $\phi \in L[-\infty, \infty]$, y que $\phi \in C^{II}$

Para reconocer el tipo al cual pertenece esta ecuación diferencial hay necesidad de efectuar un cambio de función:

Sea

(12) $$\phi(\xi) = e^{-\xi^2/2} H(\xi)$$

Derivando y sustituyendo en (8) resulta

(13) $$H'' - 2\xi H' + (\lambda - 1) H = 0$$

Esta es la ecuación de Hermite, cuyas posibles soluciones son:

(14) $$W_1 = F\left[-\frac{(\lambda-1)}{4}, \frac{1}{2}, \xi^2\right]$$

(15) $$W_2 = \xi F\left[-\frac{(\lambda+3)}{4}, \frac{3}{2}, \xi^2\right]$$

en donde F es la función hipergeométrica confluente, definida sobre una vecindad abierta del origen de radio 1 de la siguiente manera:

(16) $$F(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n)} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

Aunque F está defida inicialmente parauna vecindad del origen por medio de la prolongación analítica puede definirse para cualquierotro punto del plano complejo.

Ahora, de la definición (16):

$$F'(\alpha,\gamma,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}\cdot\frac{z^{n-1}}{(n-1)!\,n}$$

$$=\frac{\alpha}{\gamma}\sum_{(n-1)=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1+1)}\cdot\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

Es decir , que

(17) $$F'(\alpha,\gamma,z)=\frac{\alpha}{\gamma}F(\alpha+1,\gamma+1,z)$$

La posible solución general de (13) es una combinación lineal de W_1 y W_2 :

(18) $$H=A\cdot F\left(\frac{1-\lambda}{4},\frac{1}{2},\xi^2\right)+B\,\xi\,F\left(\frac{3-\lambda}{4},\frac{3}{2},\xi^2\right)$$

Entonces, por (12)

(19) $$\phi(x)=e^{-x^2/(2a^2)}\left\{A\cdot F\left(\frac{1-\lambda}{4},\frac{1}{2},\frac{x^2}{a^2}\right)+B\frac{x}{a}F\left(\frac{3-\lambda}{4},\frac{3}{2},\frac{x^2}{a^2}\right)\right\}$$

Por consiguiente :

$$\phi(x)=De^{\beta x}\quad\text{para}\quad x<-b$$

$$\phi(x)=Ce^{-\beta x}\quad\text{para}\quad x>b$$

y para $|x|<b$

$$\phi(x)=e^{-x^2/(2a^2)}\left\{A\cdot F\left(\frac{1-\lambda}{4},\frac{1}{2},\frac{x^2}{a^2}\right)+B\frac{x}{a}F\left(\frac{3-\lambda}{4},\frac{3}{2},\frac{x^2}{a^2}\right)\right\}$$

La continuidad de ϕ implica :

(20) $$Ce^{-\beta b}=e^{-b^2/(2a^2)}\left\{A\cdot F\left(\frac{1-\lambda}{4},\frac{1}{2},\frac{b^2}{a^2}\right)+B\frac{b}{a}F\left(\frac{3-\lambda}{4},\frac{3}{2},\frac{b^2}{a^2}\right)\right\}$$

y además

(21) $$De^{-\beta b}=e^{-b^2/(2a^2)}\left\{A\cdot F\left(\frac{1-\lambda}{4},\frac{1}{2},\frac{b^2}{a^2}\right)-\frac{Bb}{a}F\left(\frac{3-\lambda}{4},\frac{3}{2},\frac{b^2}{a^2}\right)\right\}$$

Además, la función ϕ' debe ser continua en toda parte ; entonces:

(22) $\phi'(x) = \beta D e^{\beta x}$ para $x < -b$

(23) $\phi'(x) = -\beta C e^{-\beta x}$ para $x > b$

Se calcula ahora para $|x| < b$:
por (17) se tiene que

$$F'\left(\frac{1-\lambda}{4}, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{1-\lambda}{2} F\left(\frac{5-\lambda}{4}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{a^2}\right)\frac{2x}{a^2}$$

$$F'\left(\frac{3-\lambda}{4}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{3-\lambda}{4} F\left(\frac{7-\lambda}{4}, \frac{5}{2}, \frac{x^2}{a^2}\right)\frac{2x}{a^2}$$

Entonces, cuando $x \in \left]-b, b\right[$ se tendrá:

(24)
$$\phi'(x) = -\frac{x}{a^2} e^{-x^2/(2a^2)}\left\{A\cdot F\left(\frac{1-\lambda}{4}, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{Bx}{a} F\left(\frac{3-\lambda}{4}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{a^2}\right)\right\}$$
$$+ e^{-x^2/(2a^2)} \frac{Ax(1-\lambda)}{a^2} F\left(\frac{5-\lambda}{4}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{a^2}\right)$$
$$+ e^{-x^2/(2a^2)} \frac{B}{a}\left\{F\left(\frac{3-\lambda}{4}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{x^2(3-\lambda)}{3a^2} F\left(\frac{7-\lambda}{4}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{a^2}\right)\right\}$$

Sean ahora :

(25)
$$\begin{cases} Z_1(x) = F\left(\frac{1-\lambda}{4}, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{a^2}\right) \\ Z_2(x) = F\left(\frac{3-\lambda}{4}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{a^2}\right) \\ Z_3(x) = F\left(\frac{5-\lambda}{4}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{a^2}\right) \\ Z_4(x) = F\left(\frac{7-\lambda}{4}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{a^2}\right) \end{cases}$$

Entonces:

(26) $\phi(x) = D e^{\beta x}$ y $\phi'(x) = D\beta e^{\beta x}$ para $x < -b$

(27) $\phi(x) = C e^{-\beta x}$ y $\phi'(x) = C e^{-\beta x}$ para $x > b$

Además ; para $|x| < b$,

$$(28)\quad \begin{aligned} \phi(x) &= e^{-x^2/(2a^2)}\left\{ A\, z_1(x) + \frac{Bx}{a}\, z(x) \right\} \\ \phi'(x) &= e^{-x^2/(2a^2)}\left\{ A\left[-\frac{x}{a^2} z_1(x) + \frac{x(1-\lambda)}{a^2} z_3(x)\right] + \right. \\ &\quad \left. + B\left[-\frac{x^2}{a^3} z_2(x) + \frac{z_2(x)}{a} + \frac{x^2(3-\lambda)}{3a^3} z_4(x)\right]\right\} \end{aligned}$$

Para ϕ y ϕ' se ha impuesto la continuidad. Además, de (27) y (28) se deduce que:

$$\phi(b) \neq 0 \quad \text{y} \quad \phi(-b) \neq 0$$

Por consiguiente la funcióm ϕ'/ϕ es necesariamente continua en los puntos

$$x = b \qquad \text{y} \qquad x = -b$$

Para $x = -b$, se tiene, entonces:

$$\frac{\phi'(b)}{\phi(b)} = \frac{\beta D e^{-\beta b}}{D e^{-\beta b}} = \beta$$

Entonces, por continuidad,

$$\beta = \frac{A\left[\frac{b}{a^2} z_1(-b) - \frac{b}{a^2}(1-\lambda) z_3(-b)\right)}{A z_1(-b) - \frac{Bb}{a} z_2(-b)} +$$

$$+ \frac{B\left[-\frac{b^2}{a^3} z_2(-b) + \frac{1}{a} z_2(-b) + \frac{b^2}{3a^3}(3-\lambda) z_4(-b)\right)}{A z_1(-b) - \frac{Bb}{a} z_2(-b)}$$

Se observa, además que para $i = 1, 2, 3, 4$, $Z_i(b) = Z_i(-b)$

Por otra parte, para $x = b$:

$$\frac{\phi'(b)}{\phi(b)} = \frac{-C\beta e^{-\beta b}}{C e^{-\beta b}} = -\beta$$

Por la continuidad de ϕ'/ϕ:

$$-\beta = \frac{A\left[\left(-\frac{b}{a}\right)z_1(b) + \frac{b}{a^2}(1-\lambda)z_3(b)\right]}{A z_1(b) + \frac{Bb}{a} z_2(b)} +$$

$$+ \frac{B\left[-\frac{b^2}{a^3} z_2(b) + \frac{z_2(b)}{a} + \frac{b^2}{3a^3}(3-\lambda) z_4(b)\right]}{A z_1(b) + \frac{Bb}{a} z_2(b)}$$

De estas ecuaciones de continuidad se obtiene el sistema

(29) $$A\left[\left(\frac{b}{a^2}-\beta\right)z_1 - \frac{b}{a^2}(1-\lambda)z_3\right] + B\left[\left(\frac{b\beta}{a} - \frac{b^2}{a^3} + \frac{1}{a}\right)z_2 + \frac{b^2}{3a^3}(3-\lambda)z_4\right] = 0$$

(30) $$A\left[\left(\beta-\frac{b}{a^2}\right)z_1 + \frac{b}{a^2}(1-\lambda)z_3\right] + B\left[\left(\frac{b\beta}{a} - \frac{b^2}{a^3} + \frac{1}{a}\right)z_2 + \frac{b^2}{3a^3}(3-\lambda)z_4\right] = 0$$

donde: $z_i = z_i(b) = z_i(-b)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$

(29) y (30) constituyen un sistema lineal homogêneo. Para que existan constantes A y B no simultáneamente nulas, es decir, para que no se reduzca al caso trivial, se necesita que el determinante del sistema sea nulo. Se observa, por otra parte, que el determinante es de la forma

$$\begin{vmatrix} U & W \\ -U & W \end{vmatrix}$$

entonces

$$0 = \begin{vmatrix} U & W \\ -U & W \end{vmatrix} = 2UW \Rightarrow UW = 0$$

Multiplicando por a;

(31) $$\left[\left(\frac{b}{a^2}-\beta\right)z_1 - \frac{b}{a^2}(1-\lambda)z_3\right]\left[\left(b\beta - \frac{b^2}{a^2} + 1\right)z_2 + \frac{b}{3a^2}(3-\lambda)z_4\right] = 0$$

Entonces, deberá darse que:

(32) $$\left(\frac{b}{a} - \beta a\right)z_1 - \frac{b}{a}(1-\lambda)z_3 = 0$$

o bien, que

(33) $$\left(b\beta - \frac{b^2}{a^2} + 1\right)z_2 + \frac{1}{3}\frac{b^2}{a^2}(3-\lambda)z_4 = 0$$

Si el dominio de la función

$$V = \frac{1}{2} k x^2$$

se extiende hasta el infinito, el problema se reduce al problema del oscilador armónico, cuya solución es bien conocida. En este caso aparece el polinomio de Hermite.

En este trabajo se estudia el caso en que el potencial es

$$V = \frac{1}{2} k x^2$$

pero el dominio de esta función no se extiende hasta el infinito, sino que a partir de un cierto valor b suficientemente grande en comparación con a, el potencial V toma un valor constante.

Se estudia también la diferencia entre los dos casos.

Para realizar este trabajo se utilizan las formas asintóticas de las funciones hipergeométricas confluentes; en este caso para

$$\frac{b^2}{a^2} \gg 1$$

La expansión asintótica de la función hipergeométrica confluente, para valores suficientemente grandes de $|x|$ viene dada por

$$F(\alpha, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} \sum_{n=0}^{M} \frac{(\alpha)_m (\alpha-\gamma+1)_n}{n!} (-x)^{-n} + O\left(|x|^{-\alpha-M-1}\right) + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^x . x^{\alpha-\gamma} \sum_{n=0}^{N} \frac{(\gamma-\alpha)_n (1-\alpha)_n}{n!} x^{-n} + O\left(\left| e^x . x^{\alpha-\gamma-N-1} \right|\right) \tag{34}$$

$M = 0, 1, 2, \ldots$, $N = 0, 1, 2, \ldots$, donde $(t)_m = \dfrac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(t)}$

En este caso, como $x \gg 1$, se tendrá:

$$F(\alpha,\gamma,x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \cdot e^{x} x^{\alpha-\gamma}\left[1 + O(x^{-1})\right] \tag{35}$$

Ahora, por definición de O, se tiene que, existe un real K tal que para cualquier valor de t,

$$|O(t)| \leqq K|t|^{-1}$$

En este caso

$$\left|O(|x|^{-1})\right| \leqq K\left|\frac{a^2}{b^2}\right| \ll K$$

En primera aproximación se desprecia este sumando en la fórmula (35) y se obtiene:

$$Z_1(b) = F\left(\frac{1-\lambda}{4}, \frac{1}{2}, \frac{b^2}{a^2}\right) \sim \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) e^{b^2/a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-1/4}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-\lambda/4}}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)} \tag{36}$$

$$Z_2(b) = F\left(\frac{3-\lambda}{4}, \frac{3}{2}, \frac{b^2}{a^2}\right) \sim \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) e^{b^2/a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-3/4}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-\lambda/4}}{\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)} \tag{37}$$

$$Z_3(b) = F\left(\frac{5-\lambda}{4}, \frac{3}{2}, \frac{b^2}{a^2}\right) \sim \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) e^{b^2/a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-3/4}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-\lambda/4}}{\Gamma\left(\frac{5-\lambda}{4}\right)} \tag{38}$$

$$Z_4(b) = F\left(\frac{7-\lambda}{4}, \frac{3}{2}, \frac{b^2}{a^2}\right) \sim \frac{\Gamma(\frac{5}{2}) e^{b^2/a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-3/4}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-\lambda/4}}{\Gamma\left(\frac{7-\lambda}{4}\right)} \tag{39}$$

Sustituyendo a las $z_i(b)$ por sus formas asintóticas, en la formula (35), se obtiene que

$$0 = \left(\frac{b}{a} - \beta a\right)\frac{\Gamma(\frac{1}{2}) e^{b^2/a^2}}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-(1+\lambda)/4} -$$

$$- \frac{b}{a}(1-\lambda)\frac{\Gamma(\frac{3}{2}) e^{b^2/a^2}}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}+1\right)}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-(1+\lambda)/4}$$

Utilizando la conocida propiedad de la función Gama

$$\Gamma(\nu + 1) = \nu\,\Gamma(\nu)$$

despueś de algunas simplificaciones se obtiene que:

$$(40) \qquad \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)} \cdot e^{b^2/a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-1/4}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-\lambda/4}\left(-\beta a - \frac{b}{a}\right) = 0$$

Procediendo en forma análoga, se sustituyen las Z_i por sus formas asintóticas en (33). Asi se obtiene:

$$0 = \left(b\,\beta - \frac{b^2}{a^2} + 1\right)\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)e^{b^2/a^2}}{\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-(3+\lambda)/4} +$$

$$+ \left[\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2(3-\lambda)\right]\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}+1\right)} \cdot e^{b^2/a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-(3-\lambda)/4}$$

Utilizando propiedades de la función Gama y simplificando;

$$(41) \qquad \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)} \cdot e^{b^2/a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-\lambda/4}\left(b\beta + \frac{b^2}{a^2} + 1\right) = 0$$

En las ecuaciones (40) y (41) se observa lo siguiente: En, primer lugar que

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)e^{b^2/a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-(1+\lambda)/4} \neq 0$$

y que

$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)e^{b^2/a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-(3+\lambda)/4} \neq 0$$

En segundo lugar: Como a, b, β , son por definición números reales positivos, se tiene entonces que

$$-\beta a - \frac{b}{a} = -\left(\beta a + \frac{b}{a}\right) \neq 0$$

y, además,

$$\beta b + \frac{b^2}{a^2} + 1 \neq 0$$

Por consiguiente, los únicos valores que satisfacen a (40) y (41) son los polos de

$$\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right) \quad ó \quad de \quad \Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)$$

Se sabe que los polos de la función Gama, son los números enteros: negativos. Entonces:

$$-n = \frac{1-\lambda}{4} \quad ó \quad -n = \frac{3-\lambda}{4} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Es decir que $\lambda = 4n + 1$, ó $\lambda = 4n + 3$. O sea que $\lambda = 2n + 1$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Entonces, los valores discretos de λ para que las funciones

$$\frac{1-\lambda}{4} \quad ó \quad \frac{3-\lambda}{4}$$

sean polos de la función Gama son los números enteros impares:

$$\lambda = 1, 2, 5, \ldots, 2n+1, \ldots \; .$$

Resultado: Solución del problema del Oscilador Armónico.

Este resultado era esperado puesto que la hipótesis es que y si $b \longrightarrow \infty$, el problema coincide completamente con al problema del Oscilador Armónico.

Es importante observar que por medio del análisis del desarrollo asintótico de la función hipergeométrica confluente se ha resuelto de otra manera el problema del Oscilador Armónico.

Ahora, para precisar la discusión se estudia la función hipergeométrica confluente en su forma asintótica, que en este caso es

$$(45) \qquad F(\alpha,\gamma,x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}\left\{1 + \alpha(\alpha-\gamma+1)(-x)^{-1} + O\left(|x|^{-2}\right)\right\}$$
$$+ \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{x} x^{\alpha-\gamma}\left\{1 + (\gamma-\alpha)(1-\alpha)\,x^{-1} + O\left(|x|^{-2}\right)\right\}$$

A partir de cierto valor de x, la función exponencial es mayorante de cualquier función polinómica.

Entonces:

$$(46) \qquad e^{x} x^{\alpha-\gamma} \gg x^{-\alpha}$$

En este caso $x = b^2/a^2$ es una constante dada . Además

$$\alpha = \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4} \quad ó \quad \alpha = \frac{3}{4} - \frac{\lambda}{4}$$

$$ó \quad \alpha = \frac{5}{4} - \frac{\lambda}{4} \quad ó \quad \alpha = \frac{7}{4} - \frac{\lambda}{4} \qquad (\lambda > 0)$$

o sea en todos los casos, α es decreciente en relación con λ ; por consiguiente, (46) no se satisface para los grandes valores de λ.

Se considera en primer lugar el caso enque se satisface (46). Sea $\alpha = -\tau$ entonces $\tau > 0$, y

$$x^{-\alpha} = x^{\tau}$$

$$e^x x^{\alpha-\gamma} = e^x x^{-\tau-\gamma} = \frac{e^x}{x^{\tau+\gamma}}$$

Entonces :

$$\frac{e^x}{x^{\tau+\gamma}} \gg x^{\tau}$$

y como $\gamma = \frac{1}{2}$ ó $\gamma = \frac{3}{2}$ ó $\gamma = \frac{5}{2}$, se tiene, para todos los casos que

$$\tau \ll \frac{x}{2 \log x}$$

por ejemplo, si $x = 100$, $\log x \doteqdot 5$, y

$$\frac{x}{2 \log x} \doteqdot 10; \quad \tau \ll 100; \quad \alpha = \frac{1-\lambda}{4}; \quad |\alpha| = \frac{\lambda - 1}{4} \ll 10; \quad \lambda \ll 40$$

Entonces en el caso en que se emplea (46):

$$\left| \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} \left\{ 1 + \alpha(\alpha - \gamma + 1)(-x)^{-1} + O\left(|x|^{-2}\right) \right\} \right| \ll \left| \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha} e^x x^{\alpha-\gamma} \left\{ 1 + (\gamma+\alpha) \right. \right.$$

$$\left. \left. (1-\alpha) x^{-1} + O\left(|x|^{-2}\right) \right\} \right|$$

Entoces para este caso se tendrá que:

$$F(\alpha, \gamma, x) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^x x^{\alpha-\gamma} \left\{ 1 + (\gamma - \alpha)(1-\alpha) x^{-1} \right\} \tag{47}$$

Por consiguiente:

(48)

$$Z_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1-\lambda}{4}} e^{b^2/a^2} \left(\frac{a}{b}\right)^{(\lambda+1)/2} \left\{ 1 + \left(\frac{1+\lambda}{4}\right)\left(\frac{3+\lambda}{4}\right) \frac{a^2}{b^2} \right\}$$

$$Z_2 = \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(\frac{3-\lambda}{4})} e^{b^2/a^2} \left(\frac{a}{b}\right)^{(\lambda+3)/2} \left\{ 1 + \left(\frac{3+\lambda}{4}\right)\left(\frac{1+\lambda}{4}\right) \frac{a^2}{b^2} \right\}$$

$$Z_3 = \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(\frac{5-\lambda}{4})} e^{b^2/a^2} \left(\frac{a}{b}\right)^{(\lambda+1)/2} \left\{ 1 + \left(\frac{1+\lambda}{4}\right)\left(\frac{\lambda-1}{4}\right) \frac{a^2}{b^2} \right\}$$

$$Z_4 = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(7-\lambda)/4)} e^{b^2/a^2} \left(\frac{a}{b}\right)^{(\lambda+3)/2} \left\{ 1 + \left(\frac{3+\lambda}{4}\right)\left(\frac{\lambda-3}{4}\right) \frac{a^2}{b^2} \right\}$$

Sustituyendo las ecuaciones de (48) en (32) y (33)

(i) $$\left(\frac{b - \beta a^2}{a} \right) Z_1 - \frac{b}{a}(1-\lambda) Z_3 = 0$$

utilizando las propiedades de la función Gama y simplificando

$$(49)\qquad 0=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)}e^{b^2/a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{(\lambda+1)/2}\left[\left(\frac{b-\beta a^2}{a}\right)\left\{1+\frac{(1+\lambda)(3+\lambda)\,a^2}{16\,b^2}\right\}-\frac{2b}{a}\left\{1-\frac{(1-\lambda)^2\,a}{16\,b^2}\right\}\right]$$

En esta fórmaula se observa que:

$$\left|\frac{(1+\lambda)(3+\lambda)}{16}\cdot\frac{a^2}{b^2}\right|\ll 1$$

ya que por hipótesis, λ no puede tomar grandes valores

Por la misma razón:

$$\left|\frac{(1-\lambda)^2}{16}\cdot\frac{a^2}{b^2}\right|\ll 1$$

Además:

$$\frac{b-\beta a^2}{a}-\frac{2b}{a}=-\frac{(b+\beta a^2)}{a}\neq 0$$

Por consiguiente:

$$(50)\qquad \left(\frac{b-\beta a^2}{a}\right)\left\{1+\frac{(1+\lambda)(3+\lambda)}{16}\cdot\frac{a^2}{b^2}\right\}+ \\ +\frac{2b}{a}\left\{\frac{(1-\lambda)^2}{16}\cdot\frac{a^2}{b^2}-1\right\}\neq 0$$

Además:

$$(ii)\qquad \left(b\beta-\frac{b^2}{a^2}+1\right)Z_2+\frac{1}{3}\frac{b^2}{a^2}(3-\lambda)Z_4=0$$

Utilizando las propiedades de Γ y simplificando:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)}e^{b^2/a^2}\left[\left(b\beta-\frac{b^2}{a^2}+1\right)\left(1+\frac{(3+\lambda)(1-\lambda)\,a^2}{16\,b^2}\right)+\frac{6b^2}{a^2}\left\{1+\frac{(3+\lambda)(\lambda-3)}{16\,b^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}\right\}\right]=0$$

como $a^2/b^2\gg 1$ y λ está restringido a satisfacer (46), el segundo factor de (51) vale aproximadamente:

$$(52)\qquad b\beta+\frac{5b^2}{a^2}+1\neq 0$$

La hipótesis utilizada es que para los valores λ no mayores que un cierto número, el segundo sumando en (45) es dominante.

Ahora, se empleará (45) para valores de λ elegidos convenientemente para que:

(53) $$e^{x} \cdot x^{\lambda-\gamma} \ll x^{-\lambda}$$

Resulta que , entonces

$$\left| \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\lambda)} e^{x} x^{\lambda-\gamma} \left\{ 1 + (\gamma-\lambda)(1-\lambda)x^{-1} \right\} \right| \ll$$

(54) $$\leqslant \left| \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\lambda)} \left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda} \left\{ 1 + \lambda(\lambda-\gamma+1)(-x)^{-1} \right\} \right|$$

Es decir, que en este caso , para valores de λ suficientemente grandes, el primer sumando de (45) es dominante.

Entonces, en este caso

(55) $$F(\lambda,\gamma,x) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\lambda)} \left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda} \left\{ \lambda(\lambda-\gamma+1)(-x)^{-1} \right\}$$

Entoces, en este caso:

$$z_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{4}\right)} \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{(1-\lambda)/4} \left\{ \frac{(1-\lambda)(3-\lambda)}{16} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right\}$$

$$z_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{4}\right)} \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{(5-\lambda)/4} \left\{ \frac{(5-\lambda)(3-\lambda)}{16} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right\}$$

Sustituyendo en (32) y simplificando:

(56) $$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{4}\right)} \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{(5-\lambda)/4} \cdot \frac{(1-\lambda)(3-\lambda)}{16} \left\{ -\frac{b}{a}\left(\frac{\lambda-7}{2}\right) - \beta a \right\} = 0$$

Se observa en esta fórmula lo siguiente :

$$\frac{b}{a} > 0 ; \quad \beta a > 0 \quad y \quad -\frac{7}{2} + \frac{\lambda}{2} > 0$$

Es decir, que para el segundo factor no existen ceros .

Por otra parte : λ es , por definición un número positivo. Por consiguiente la función

$$\frac{\lambda+1}{4}$$

no tiene polos para la función Γ .

Ahora:

$$z_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{4}\right)} \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{(3-\lambda)/4} \left\{ \frac{(3-\lambda)(-1-\lambda)}{16} \frac{a^2}{b^2} \right\}$$

$$Z_4 = \frac{3\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{4}\right)} \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{(7-\lambda)/4} \left\{ \frac{(7-\lambda)(-1-\lambda)}{16} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right\}$$

Sustityendo en (33) y simplificando:

$$(57) \qquad \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{4}\right)} \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{(7-\lambda)/4} \left\{ \frac{(7-\lambda)(-1-\lambda)}{16} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right\}$$

Como $\lambda \gg 1$, resulta que esta función tampoco tiene ceros para sus factores.

Del análisis de (49) y (50) resulta :

Si λ cumple la restricción impuesta por (46), las soluciones es decir, los valores propios son números naturales impares.

Si λ cumple la restricción impuesta por (53), no existen soluciones para (56) y (57)

Entonces:

Dado a^2/b^2 fijo, pero elegido convenientemente grande , aparece una sucesión de valores propios para λ que satisfacen á (49) o á (51) esta sucesión de números naturales impares . Esta sucesión no crece indefinidamente puesto que λ debe satisfacer la condición (46).

Con las condiciones (46) y (53) es posible determinar hasta qué valor de λ existen los valores propios , es decir, hasta dónde λ es admisible para el problema.

Para determinar este valor máximo admisible (que naturalmente) dependerá de a^2/b^2) es necesario tomar

$$(58) \qquad Z_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)} e^{b^2/a^2} \left(\frac{a}{b}\right)^{(\lambda+1)/2} \left\{ 1 + \frac{(\lambda+1)(\lambda+3)}{16} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right\} +$$

$$+ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{4}\right)} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{(1-\lambda)/2} \frac{(1-\lambda)(3-\lambda)\,a^2}{16\,b^2}$$

$$(59) \qquad Z_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)} e^{b^2/a^2} \left(\frac{a}{b}\right)^{(\lambda+3)/2} \left\{ 1 + \frac{(\lambda+1)(\lambda+3)}{16} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right\} +$$

$$+ \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{4}\right)} \left(\frac{a}{b}\right)^{(3-\lambda)/2} \frac{(3-\lambda)(-1-\lambda)\,a^2}{16\,b^2}$$

(60) $$Z_3 = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-\lambda}{4}\right)} e^{b^2/a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{(\lambda+1)/2}\left\{1 + \frac{(\lambda+1)(\lambda-1)\,a^2}{16\,b^2}\right\} +$$

$$+ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{4}\right)}\left(\frac{a}{b}\right)^{(5-\lambda)/2} \frac{(5-\lambda)(3-\lambda)\,a^2}{16\,b^2}$$

(61) $$Z_4 = -\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{4}\right)} e^{b^2/a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{(\lambda+3)/2}\left\{1 + \frac{(\lambda+3)(\lambda-3)\,a^2}{16\,b^2}\right\} +$$

$$+ \frac{3}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{4}\right)}\left(\frac{a}{b}\right)^{(7-\lambda)/2} \frac{(7-\lambda)(-1-\lambda)\,a^2}{16\,b^2}$$

De aquí se obtiene:

(62) $$0 = \left(\frac{b}{a} - \beta a\right)\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)} e^{b^2/a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{(\lambda+1)/2}\left\{1 + \frac{(\lambda+1)(\lambda+3)\,a^2}{16\,b^2}\right\} +\right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{4}\right)}\left(\frac{a}{b}\right)^{(1-\lambda)/2} \frac{(1-\lambda)(3-\lambda)\,a^2}{16\,b^2}\right] + \frac{b(\lambda-1)}{a}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-\lambda}{4}\right)} e^{b^2/a^2} \cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{(\lambda+1)/2}\left\{1 + \frac{(\lambda+1)(\lambda-1)\,a^2}{16\,b^2}\right\} + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{4}\right)}\left(\frac{a}{b}\right)^{(5-\lambda)/2}\frac{(5-\lambda)(3-\lambda)\,a^2}{16\,b^2}\right]$$

o bien,

(63)

$$0 = \left(b\beta - \frac{b^2}{a^2} + 1\right)\left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{4}\right)} e^{b^2/a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{(\lambda+3)/2}\left\{1 + \frac{(\lambda+1)(\lambda+3)\,a^2}{16\,b^2}\right\} +\right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{4}\right)}\left(\frac{a}{b}\right)^{(3-\lambda)/4} \frac{(3-\lambda)(-1-\lambda)\,a^2}{16\,b^2}\right] +$$

$$+ \frac{b^2(3-\lambda)}{3\,a^2}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7-\lambda}{4}\right)} \cdot e^{b^2/a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{(\lambda+3)/2}\left\{1 + \frac{(\lambda^2-9)\,a^2}{16\,b^2}\right\}\right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\,\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{4}\right)}\left(\frac{a}{b}\right)^{(7-\lambda)/2} \frac{(7-\lambda)(-1-\lambda)\,a^2}{16\,b^2}\right]$$

Estas dos ecuaciones , (62) y (63), permiten, dado a^2/b^2 determinar los valores propios de λ.

Utilizando los Métodos númericos del Análisis, y con la ayuda de un computador , al encontrar los valores de λ y β que satisfagan (62) Y (63) quedarán determinados los niveles de la energía , por (3) y (10) .Queda así demostrado el problema propuesto, dentro de las restricciones impuestas.

BIBLIOGRAFIA

Higher trascendental Funcions, ERDELYI - MAGNUS - OBERHETTINGER - TRICOMI, M.G. H ill, New York.

Quantum Mechanics, SCHIFF, M. G . Hill, NEW YORK.

Problems in quontum mechanics, GOL'MDAN - KRIVCHUENKOV, Addson - Weley, Reading .

(Recibido en Marzo de 1964.)