UN CRITERIO SOBRE LA CONVERGENCIA DE LA INTEGRAL IMPROPIA (Continuación)

por

YU TAKEUCHI

5. LA CONSTRUCCION DE UNA FUNCION F(x) CUYO INDICE γ_F ES 1.

TEOREMA 9.

Sean

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) = x,\quad f_2(x) = \log(1+x),\ \ldots\ ,\ f_{n+1}(x) &= \log(1+f_n(x)) \\ &= f_n(\log(1+x)) \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Entonces:

i) $f_n(x)$ es creciente y tiende a ∞ cuando $x \to \infty$.

ii) $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ para todo n y x.

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

iv) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 0$, para todo n.

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} = 0$, para todo x.

Demostración:

i) Es evidente.

ii) $f_{n+1}(x) = \log(1+f_n(x)) < f_n(x)$

iii) de i), existe el límite

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, para todo x

De (49), se tiene

$$f(x) = \log(1+f(x)) \tag{50}$$

La única solución de (50) es f (x) = 0.

iv) Evidente.

v) $$f_{n+1}(x) = \log(1 + f_n(x)) > f_n(x) - \frac{(f_n(x))^2}{2}$$

Entonces $\left[f_{n+1}(x) / f_n(x) \right] > 1 - (f_n(x)/2)$. También:

$$f_{n+1}(x) = \log(1 + f_n(x)) < f_n(x)$$

Por consiguiente se tiene:

$$1 - \frac{f_n(x)}{2} < \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} < 1 \tag{51}$$

De iii),

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 1$$

TEOREMA 10

$$\frac{1}{(1/f_m) + 3/4\,(n-m)} < f_n(x) < \frac{1}{(1/f_m) + 2/5\,(n-m)} \tag{52}$$

donde m es un número natural (dependiente de x) tal que

$$f_m(x) < \frac{1}{4} \tag{53}$$

(Nota: Para x dado siempre existe m que cumple (53), ver iii) del teorema anterior)

Demostración:

De ii) del teorema 9, se obtiene

$$n \geq m \quad \text{implica} \quad f_n(x) < \frac{1}{4}$$

De (51) se tiene

$$\frac{7}{8} < \frac{f_{n+1}}{f_n} < 1$$

o bien,

$$f_{n+1} < f_n < \frac{8}{7} f_{n+1} \tag{54}$$

Entonces

$$f_{n+1} > f_n - \frac{(f_n)^2}{2} > f_n - \frac{1}{2}\left(\frac{8}{7} f_{n+1}\right)^2 > f_n - \frac{3}{4}(f_{n+1})^2 \tag{55}$$

Sea $\phi(t)$ una función derivable tal que

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= -\frac{3}{4}\phi^2 \\ \phi(m) &= f_m(x) \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

De (56) se tiene :

$$\phi(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{f_m}\right) + \frac{3}{4}(t-m)}$$

Ahora se define una función $\psi(t)$ como sigue:

$$\begin{aligned} &\psi(n) = f_n \\ &\psi(t) = f_n + (t-n)\left\{f_{n+1} - f_n\right\} \quad \text{si } n \leq t \leq n+1 \end{aligned} \tag{57}$$

De (55), $\psi(t)$ satisface la desigualdad

$$\psi(n+1) - \psi(n) > -3/4\left(\psi(n+1)\right)^2 \tag{58}$$

Se va a demostrar que $\phi(t) \leq \psi(t)$ para todo t, $t \geq m$. Si existe t, tal que : $\phi(t) > \psi(t)$ entoces existe $t_o \in [n, n+1)$ en donde

$$\psi(t_o) = \phi(t_o) \quad \text{y, además}$$

$$\phi'(t_o) > \psi'(t_o) \tag{59}$$

donde ψ' es la derivada por la derecha.

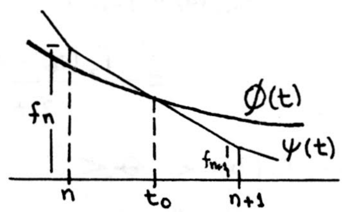

Fig 4

En éste punto t_o obtenemos:

$$\psi'(t) = \psi(n+1) - \psi(n) > -\frac{3}{4}\left(\psi(n+1)\right)^2 > -\frac{3}{4}\left(\psi(t_o)\right)^2$$
$$= -\frac{3}{4}\left(\phi(t_o)\right)^2 = \phi'(t_o)$$

Esto contradice a (59) , por lo tanto se tiene:

$\phi(t) \leq \psi(t)$ para todo $t \geq m$.

Tomando $t = n$, se obtiene:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{f_n}\right) + \frac{3}{4}(n-m)} \leq f_n \tag{60}$$

Para demostrar la otra parte del teorema basta utilizar la desigualdad dad:

$$\left.\begin{array}{c} f_{n+1} = \log(1+f_n) < f_n - \frac{2}{5}(f_n)^2 \\ \left(\text{para} \quad f < \frac{1}{4}\right) \end{array}\right\} \tag{61}$$

TEOREMA 11

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \{f_n(x)\}^k$, converge si $k > 1$

diverge si $k \leq 1$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \{f_n(a) - f_n(b)\}$ es convergente.

Demostración:

i) es evidente por el teorema anterior.

ii) Para mayor facilidad suponemos que $a > b$, entonces:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(a) - f_{n+1}(b) &= \log(1+f_n(a)) - \log(1+f_n(b)) \\ &= \frac{f_n(a) - f_n(b)}{1+\theta_n} < \frac{f_n(a) - f_n(b)}{1+f_n(b)} \end{aligned} \tag{62}$$

ya que $f_n(b) < \theta_n < f_n(a)$. (Teorema del valor medio).

Aplicando sucesivamente la relación (62) se tiene:

$$f_{n+1}(a) - f_{n+1}(b) < \frac{f_m(a) - f_m(b)}{\prod_{k=m}^{n} \{1 + f_k(b)\}} \tag{63}$$

Del teorema 10 obtenemos:

$$\prod_{k=m}^{n} \{1 + f_k(b)\} \geq \prod_{m}^{n} \left\{1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{f_m}\right) + \frac{3}{4}(n-m)}\right\} \tag{64}$$

$$\geq \prod_{k=0}^{n-m} \left\{1 + \frac{4}{3(k+N_0)}\right\}$$

donde N_0 es un número entero mayor que $4/3\ f_m$ Tomando logaritmo de ambos miembros de (64) se obtiene:

$$\log \prod_{k=0}^{n-m} \left\{1 + \frac{4}{3(k+N_0)}\right\} = \sum_{k=0}^{n-m} \log\left\{1 + \frac{4}{3(k+N_0)}\right\}$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n-m} \frac{4}{3(k+N)} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-m}\left(\frac{4}{3(k+N)}\right)^2$$

$$\geq \frac{4}{3}\log(n-m+N_0) - \text{constante.}$$

Entonces:

$$\prod_{k=0}^{n-m}\left\{1 + \frac{4}{3(k+N)}\right\} \geq A.\ (n-m+N_0)^{4/3} \tag{65}$$

donde A es una constante independiente de n.

De (63), (64) y (65) se tiene:

$$\sum_{k=0}^{n-m}\left\{f_n(a) - f_n(b)\right\} \leq \left(f_m(a) - f_m(b)\right)\sum_{n=m+1}^{\infty}\left[\frac{1}{\prod_{k=m}^{n}\left\{1+f_k(b)\right\}}\right]$$

$$\leq \frac{f_m(a) - f_m(b)}{A}\sum_{n=m+1}^{\infty}(n-m+N_0)^{-4/3} < \infty$$

TEOREMA 12

Sea $$F_n(x) = \prod_{k=1} \frac{1+f_k(x)}{1+f_k(1)} = \frac{(1+x)(1+\log(1+x))\ldots(1+f_n(x))}{2.(1+\log 2)\ldots(1+f_n(1))} \tag{66}$$

entonces:

i) $F_{n+1}(x) > F_n(x)$ para todo $x > 1$.

ii) $F_n(x)$ es creciente y tiende a ∞ cuando $x \longrightarrow \infty$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ (convergente).

iv) $F(x)$ es creciente y tiende a ∞ cuando $x \longrightarrow \infty$

v) $F_n(x) \leqslant F_{n+1}(x) \leqslant F(x)$ para todo n.

Demostración:

i) $F_{n+1}(x) / F_n(x) = [1 + f_n(x)] / [1 + f(x)] > 1.$

ii) Evidente.

iii) Sea $[1 + f_k(x) / [1 + f_k(1)] = 1 + \Delta_k \quad (k \geq m).$
entonces

$$[1 - f_k(1)] < 1/[1 + f_k(1)] < 1 - f_k(1) + (f_k(1))^2$$

luego

$$(1 - f_k(1))(1 + f_k(x)) < 1 + \Delta_k < (1 + f_k(x)) \left\{1 - f_k(1) + (f_k(1))^2\right\}$$

Por consiguiente :

$$\left\{f_k(x) - f_k(1)\right\} - f_k(x) f_k(1) < \Delta_k <$$
$$< \left\{f_k(x) - f_k(1)\right\} - f_k(x) f_k(x) + \left\{f(1)\right\}^2 + f_k(x) \left\{F_k(1)\right\}^2 \qquad (67)$$

Del teorema 11 se tiene:

$$\sum_m^\infty \left\{f_k(1)\right\}^2 < \infty$$

$$\sum_m^\infty (f_k(1))^2 f_k(x) < f_m(x) \sum_m^\infty (f_k(1))^2 < \infty$$

$$\sum_m^\infty f_k(x) f_k(1) < \left[\sum |f_k(x)|^2\right]^{1/2} \left[\sum^\infty |f_k(1)|^2\right]^{1/2} < \infty$$

$$\sum_m^\infty \left\{f_k(x) - f_k(1)\right\} < \infty$$

luego $\sum^\infty \Delta_k$ es convergente , por lo tanto el producto infinito converge a un límite.

iv) y v) son evidentes.

TEOREMA 13

i) $F_n(x) \in S_d$

ii) $F(\log(1 + x)) = F(x) / (1 + x)$

iii) $F(x) \in S_d$

IV) $\gamma_F = 1$

v) $\lim_{x\to\infty} \frac{F'(x)\,x}{F(x)} = 1$

vi) $\lim_{x\to\infty} \frac{F(x+1)}{F(x)} = 1$

Demostración :

i)

$$f'_{n+1}(x) = \frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)} \quad , \quad f'_2(x) = \frac{1}{1+x}$$

entonces

$$f'_{n+1}(x) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\{1+f_k(x)\}} = \frac{}{1+f(1)\quad F(x)}$$

por lo tanto se obtiene:

$$\int_1^B \frac{dx}{F_n(x)} = \prod_{k=1}^{n}\{1+f_k(1)\}\int_1^B f'_{n+1}(x)\,dx$$

$$= \{1+f_k(1)\}\cdot\{f_{n+1}(B) - f_{n+1}(1)\} \longrightarrow \infty \quad (B\to\infty)$$

ii) $f_n(\log(1+x)) = f_{n+1}(x)$

luego $F_n(\log(1+x)) = \prod_1^n [1+f_{k+1}(x)]/[1+f_k(1)] =$

$$= \frac{1+f_{n+1}(x)}{1+x}\prod_1^n \cdot \frac{1+f_k(x)}{1+f_k(1)} = \frac{1+f_{k+1}(x)}{1+x}F_n(x)$$

tomando límite $(n\longrightarrow\infty)$ se tiene:

$$F(\log(1+x)) = F(x)/(1+x)$$

Nota: F (x) es contínua ya que $F_n(x)$ es contínua y creciente con respecto a n, luego $F_n(x) \longrightarrow F(x)$ uniformemente en un intervalo acotado. (Teorema de Dini)

iii) Sean

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = e^1 - 1, \ \ldots\ , a_n = e^{a_{n-1}} - 1 \qquad (68)$$

entonces

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{dx}{F(x)} = \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{dx}{(1+x)\;F(\log(1+x))} = \int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{dx}{F(x)}$$

luego

$$\int_{a_0}^{a_n} \frac{dx}{F(x)} = \int_{a_0}^{a_1} \frac{dx}{F(x)} \left\{ 1 + 1 + \ldots \right\} \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

iv)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x F(\log x)} \geq \lim_{x\to\infty} \frac{F(x}{x F(\log(1+x))} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{(x+1) F(\log(1+x))} \left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$$

Entonces

$$\gamma_F \geq 1$$

Pero $F \in Sd$, es decir, $\gamma_F \leq 1$, entonces $\gamma_F = 1$

v) $$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x F(\log x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{F'(x)}{F(\log x) + F'(\log x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{F'(x)}{F(\log x)} = 1$$

ya que $F'(x) \ll F(x)$ de acuerdo con el teorema 5. Entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F'(x)\, x}{F(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{F'(x}{F(\log x)} \Big/ \frac{F(x)}{x F(\log x)} = 1$$

vi) De iv) se tiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x+1)}{F(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{F(x+1)}{(x+1) F(\log(1+x))} \Big/ \frac{F(x)}{(x+1) F(\log(1+x))} = 1$$

TEOREMA 13

Sea

$$G_{\lambda,n}(x) = \prod_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1 + \lambda f_k(x)}{1 + \lambda f_k(x)} \right\} \qquad (69)$$

entonces :

i) $\lim_{n\to\infty} G_{\lambda,n}(x) = G_\lambda(x)$ (convergente)

ii) $\gamma_{G_\lambda} = \lambda$

Demostración

i) Evidente

ii)

$$G_{\lambda,n}(\log(1+x)) = \frac{1+\lambda f_{n+1}(x)}{1+\lambda_x} G_{\lambda,n}(x)$$

tomando el límite, $n \to \infty$, se tiene:

$$G_\lambda(\log(1+x)) = \frac{G_\lambda(x)}{1+\lambda x} \qquad (70)$$

De (69), se tiene (para $y > x$)

$$\log \frac{G_{n,\lambda}(y)}{G_{n,\lambda}(x)} = \sum_{k=1}^{n} \log \frac{1+\lambda f_k(y)}{1+\lambda f_k(x)} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \log\left[\frac{1+f_k(y)}{1+f_k(x)}\right] = \lambda \sum_{k=1}^{n} \log \frac{1+f_k(y)}{1+f_k(x)} = \lambda \log \frac{F_n(y)}{F_n(x)}, \lambda > 1$$

$$\log \frac{G_{n,\lambda}(y)}{G_{n,\lambda}(x)} = \sum_{k=1}^{n} \log \frac{1+\lambda f_k(y)}{1+\lambda f_k(x)} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \log \frac{1+f_k(y)}{1+f_k(x)} = \log \frac{F_n(y)}{F_n(x)} \quad \text{si } \lambda \leq 1$$

Tomando $n \to \infty$, se tiene

$$\log \frac{G_\lambda(y)}{G_\lambda(x)} \leq \left.\begin{matrix} \lambda \log F(y)/F(x) & \text{para } \lambda > 1 \\ \log F(y)/F(x) & \text{para } \lambda \leq 1 \end{matrix}\right\} \qquad (71)$$

Tomando $y = x+1$, y aplicando vi) del teorema 12, se obtiene:

$$\lim_{x \to} \log \frac{G_\lambda(x+1)}{G_\lambda(x)} \leq \binom{\lambda}{1} \lim_{x\to\infty} \log \frac{F(x+1)}{F(x)} = \log \quad = 0$$

es decir,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{G_\lambda(x+1)}{G_\lambda(x)} = 1 \tag{72}$$

De (70) y (71) se tiene:

$$\gamma_{G_\lambda} = \lim_{x\to\infty} \frac{G_\lambda(x)}{x\, G_\lambda(\log x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{G_\lambda(x+1)}{(x+1)\, G_\lambda(\log(x+1))}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{G_\lambda(x)}{(x+1)\, G_\lambda(\log(x+1))} \cdot \frac{G_\lambda(x+1)}{G_\lambda(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\lambda x+1}{x+1} = \lambda$$

REFERENCIAS

1. T.M. Apostol: Matematical Analisis
2. N. Bourbaki ; Fonctions D'une Variable Réelle
3. E. W. Hobson : The Theory of Funct ion of a Real Variable
4. Teiji Takagui : Analisis Matemático
5. Rey Pastor : Análisis Matemátido