Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen XXVII (1993), págs. 45–54

ECUACIONES DISIPATIVAS: CONJUNTOS ABSORBENTES Y ATRACTORES

JAIME LESMES

Resumen. Muchos fenómenos físicos se describen mediante ecuaciones de la forma $\frac{du}{dt} = F(u(t))$, con condición inicial $u(0) = u_0$, en donde $u(t)$ varía en un espacio de Hilbert H de funciones sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, y F es un operador diferencial (en general no lineal) en las variables espaciales, que actúa en H. El estudio del comportamiento de las soluciones cuando $t \to +\infty$ conduce a la consideración de los conjuntos absorbentes y de los atractores. En esta conferencia exponemos métodos para probar la existencia de esos conjuntos, debidos a R. Temam et al., así como algunas propiedades de los atractores de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky, halladas recientemente por F. Pinto.

INTRODUCCIÓN

Numerosos fenómenos físicos se describen mediante ecuaciones de evolución de la forma: $\frac{du}{dt} = F(u(t))$, en donde $u(t)$ varía en un espacio de Hilbert apropiado H ("espacio de fase") y F es un operador, en general no lineal, que actúa en H. En contraste con el caso lineal, la evolución de un sistema dinámico no lineal, o sea, la evolución del sistema $u(t)$ a partir de un estado inicial $u(0) = u_0$, es bastante complicada: no es fácil predecir si tiende a un estado de reposo, o a un estado estacionario simple, o a un estado periódico, o cuasiperiódico, o "caótico" . El problema matemático que se plantea es estudiar el comportamiento del sistema cuando $t \to \infty$, o sea, determinar el estado "permanente" al cual tiende el sistema después de un (corto) periodo " transitorio".

El propósito de esta conferencia es presentar métodos desarrollados por R. Temam et al. para probar la existencia de conjuntos atractores de sistemas dinámicos no lineales, y resultados obtenidos recientemente por F. Pinto para la descripción del comportamiento asintótico de soluciones de la ecuación de

---

Conferencia presentado al II Coloquio Latinoamericano de Análisis, Santafé de Bogotá, noviembre de 1992. Trabajo parcialmente apoyado por COLCIENCIAS, mediante contrato N 1204-05-037-90. .

Kuramoto-Sivashinsky, basados en un trabajo de Foias y Temam [4] sobre la ecuación de Navier-Stokes.

§1. Ejemplos Preliminares

Antes de exponer lo referente a los conjuntos absorbentes y los atractores, mencionaremos dos ejemplos concretos de sistemas dinámicos no lineales, que nos servirán como puntos de referencia: el péndulo con rozamiento y la ecuación de Navier-Stokes.

1.1 El péndulo con rozamiento.

Si denotamos por θ el ángulo formado por el brazo del péndulo y la vertical que pasa por el punto de suspensión, el movimiento del péndulo está descrito por la ecuación:

$$\theta'' + \alpha\,\theta' + \beta\, sen\theta = 0, \tag{1.1.1}$$

con condiciones iniciales :

$$\theta(0) = \theta_0, \qquad \theta'(0) = \varphi_0 \tag{1.1.2}$$

Aquí $\alpha > 0, \beta > 0$ son constantes convenientes. Obviamente (1.1.1) es equivalente al sistema :

$$\begin{cases} \theta' = \varphi \\ \varphi' = -\beta\, sen\theta - \alpha\,\varphi, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

así que en este caso el espacio de fase es $H = \mathbb{R}^2$.

Es bien conocido que el problema (1.1.3), (1.1.2) tiene solución única ([6], Cap. 8).

1.2 Ecuación de Navier-Stokes

Esta ecuación describe el movimiento de un fluido viscoso incompresible.

Supongamos que el fluido se mueve en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 2,3)$ con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular, y denotemos por $u(x,t)$ la velocidad y por $p(x,t)$ la presión del fluido, en el punto $x \in \Omega$ y en el instante $t \geq 0$; si $\nu > 0$ representa la viscocidad (cinemática) del fluido, su movimiento está descrito por las ecuaciones (ver [7]):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = f \\ div\ u = 0 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

en Ω, con la *condición de contorno* :

$$u(\cdot,t) = 0 \qquad \text{en } \Gamma \tag{1.2.2}$$

y la *condición inicial* :

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{en } \Omega \tag{1.2.3}$$

Aquí el término $f \equiv f(x,t)$ proviene de las fuerzas exteriores.

1.2.1 Planteamiento Funcional del problema.

Para simplificar la exposición, vamos a limitarnos al caso $n = 2$, ya que para $n = 3$ la situación es mucho más complicada (se ha probado la unicidad de las soluciones solamente en clases de funciones más pequeñas que aquéllas en las cuales se conoce la existencia; ver [13], Cap. III, §3);también supondremos que el sistema dinámico asociado a las ecuaciones (1.2.1) es autónomo, o sea, que f es independiente de t.

a) Los espacios de Hilbert que se eligen para estudiar este problema de evolución son :

i) $H = \{u \in (L^2(\Omega))^2 |\ \text{div}\ u = 0, u.\vec{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma\}$, con el producto escalar :

$$(u,v) = \sum_i \int_\Omega u_i v_i dx, \qquad \text{y la norma } : |u| = (u,u)^{1/2}$$

ii) $V = \{u \in (H_0^1(\Omega))^2 |\ div\ u = 0\}$ con el producto escalar :

$$((u,v)) = \sum_i \int_\Omega (\nabla u_i . \nabla v_i) dx. \qquad \text{y la norma } : ||u|| = ((u,u))^{1/2} = |\nabla u|$$

Antes de continuar, debemos aclarar que se tiene un teorema de traza que asegura la existencia de $u.\vec{n}$ sobre Γ, como un elemento de $H^{-1/2}(\Gamma)$, cuando $u \in (L^2(\Omega))^2$ y $(div\ u) \in L^2(\Omega)$ (ver [12], Cap. I; la demostración detallada se encuentra en [8]). Por otra parte, los espacios H y V pueden caracterizarse como las clausuras del espacio

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in (\mathbb{D}(\Omega))^2 |\ \text{div}\ \varphi = 0\}$$

en $(L^2(\Omega))^2$ y en $(H_0^1(\Omega))^2$, respectivamente.

b) Se tiene : $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$, con inyecciones densas y continuas.

c) Vamos a definir un operador lineal no acotado A en H. Su dominio es:

$$D(A) = \{u \in V \mid \exists k > 0 \text{ tal que } \forall v \in V, |((u,v))| \leq k|v|\}$$

y se define $A : D(A) \to H$ por la fórmula :

$$(Au, v) = ((u,v)), \qquad u \in D(A), \qquad v \in V. \tag{1.2.4}$$

De hecho, se tiene : $D(A) = (H^2(\Omega))^2 \cap V, \quad A = -P.\Delta$, en donde P es la proyección ortogonal de $(L^2(\Omega))^2$ sobre H, y Δ es el operador de Laplace.

1.2.2 Forma débil de la ecuación de Navier-Stokes. Esta formulación se debe a Leray (1933/34).

Sea $v \in V$ arbitrario; si multiplicamos la primera de las ecuaciones (1.2.1) por v e integramos sobre Ω, se obtiene la forma débil de la ecuación de *Navier–Stokes* :

$$\frac{d}{dt}(u,v) + \nu((u,v)) + b(u,u,v) = (f,v), \forall v \in V, \tag{1.2.5}$$

siendo

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx$$

Puede mostrarse (ver [8]) que la forma trilineal b es continua sobre

$$(H_0^1(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2$$

Por medio de b se obtiene un operador $B : V \to V'$, definido por la fórmula:

$$B(u)(v) = b(u,u,v), \qquad \forall u, v \in V \tag{1.2.6}$$

De esta manera, (1.2.5) puede escribirse :

$$\frac{d}{dt}(u,v) + \nu(Au,v) + \langle B(u), v\rangle = (f,v), \qquad \forall v \in V \tag{1.2.7}$$

y finalmente, el problema (1.2.1)-(1.2.3), nos queda :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \nu Au + B(u) = f, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.2.8}$$

en donde los operadores A y B están definidos por (1.2.4) y (1.2.6) respectivamente.

Se tiene el siguiente teorema de existencia y unicidad ([13], Cap. III, Teorema 2.1) :

Teorema. *Dados $u_0, f \in H$, existe una única función $u(t)$, solución del problema (1.2.8), tal que*

$$u \in C([0,T];H) \cap L^2(0,T;V), \qquad \forall T > 0 .$$

Para todo $t > 0, u(t) \in D(A)$, y la aplicación $u_0 \to u(t)$ de H en $D(A)$ es continua. Además, si $u_0 \in V$, entonces

$$u \in C([0,T];V) \cap L^2(0,T;D(A)), \qquad \forall T > 0$$

[Nota : sobre $D(A)$ se toma la norma $u \mapsto |Au|$].

§2. Conjuntos Absorbentes

2.1. Órbitas

Supongamos que estamos considerando un sistema dinámico cuya evolución está descrita por un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores

$$S(t) : H \to H$$
$$u_0 \mapsto u(t)$$

y que para todo $t \geq 0, S(t)$ es continuo. (Este es el caso en los dos ejemplos considerados en 1.).

Se llama *órbita* (positiva) *a través de* $u_0 \in H$ al conjunto $\{S(t)u_0/t \geq 0\}$.

Se llama *órbita de un conjunto* $\mathcal{A} \subset H$, al conjunto $\cup_{t\geq 0} S(t)\mathcal{A}$.

2.2 Definición. Bajo las hipótesis de 2.1, sean $\mathcal{B} \subset H$, y, $\mathcal{U}$ vecindad abierta de $\mathcal{B}$. Se dice que $\mathcal{B}$ es *absorbente* en $\mathcal{U}$ (o que $\mathcal{B}$ *absorbe los conjuntos acotados* de $\mathcal{U}$), si para todo subconjunto acotado $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{U}$, existe $t_1 \equiv t_1(\mathcal{B}_0) > 0$, tal que para todo $t \geq t_1, S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$.

En el caso del péndulo con rozamiento (Ejemplo 1.1), al dibujar el diagrama de fases se visualizan muy bien los conjuntos absorbentes.

2.3 Observación. La existencia de un conjunto absorbente acotado está relacionada con el hecho de que el fenómeno físico sea *disipativo*, o sea, de que haya disipación de energía, por ejemplo por rozamiento mecánico, o debido a la viscocidad del fluido en movimiento (ver [7]). De hecho, la existencia de conjuntos absorbentes acotados se usa como definición matemática de disipatividad (propuesto para el caso de dimensión finita por Billoti-La Salle [1]; para dimensión infinita, se encuentra en el libro [5] de Hale). Mas, como observa Temam ([13], Cap. I, 1.3), en el caso de dimensión infinita hay fenómenos considerados físicamente como disipativos, para los cuales no se conoce la existencia de conjuntos absorbentes.

2.4. La ecuación de Navier-Stokes. Veamos la existencia de conjuntos absorbentes para el caso de la ecuación de $Navier - Stokes$ $(n = 2)$, o sea, el ejemplo 1.2.

De (1.2.7), obtenemos :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\|u\|^2 = (f, u), \forall u \in V, \tag{2.4.1}$$

en donde hemos usado el hecho de que $b(u, u, u) = 0$.

Ahora, A es un operador lineal autoadjunto positivo en H y $A^{-1} : H \to H$ es un operador compacto (ver [8] para la demostración detallada de la anterior y de estas afirmaciones); si $\lambda_1 > 0$ es el primer valor propio de A, tenemos :

$$(f, u) \leq |f||u| \leq \lambda_1{}^{-\frac{1}{2}}\|u\| \cdot |f| \leq \frac{\nu}{2}\|u\| + \frac{1}{2\nu\lambda_1}|f|^2 \tag{2.4.2}$$

De (2.4.1) y (2.4.2) se obtiene, con algunos cálculos :

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\lambda_1|u|^2 \leq \frac{1}{\nu\lambda_1}|f|^2$$

de donde, integrando,

$$|u(t)|^2 \leq |u_0|^2 e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{1}{\nu^2\lambda_1^2}|f|^2(1 - e^{-\nu\lambda_1 t}) \tag{2.4.3}$$

De (2.4.3) obtenemos enseguida :

$$\limsup_{t\to+\infty} |u(t)| \leq \frac{1}{\nu\lambda_1}|f| \tag{2.4.4}$$

y, por lo tanto, se ha probado que toda bola en H con centro en el origen y radio estrictamente mayor que $\rho_0 = \frac{1}{\nu\lambda_1}|f|$, es un conjunto absorbente.

§3. ATRACTORES

Suponemos aquí, como en el número anterior, que la evolución del sistema dinámico está descrita por un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores continuos en H.

3.1. Definiciones

3.1.1 Si $\mathcal{A}$ es un subconjunto de H, se llama (conjunto) *ω-límite de $\mathcal{A}$* al conjunto

$$\omega(\mathcal{A}) = \cap_{s\geq 0} \overline{\cup_{t\geq s} S(t)\mathcal{A}}$$

3.1.2 Se dice que $X \subset H$ es un conjunto *invariante funcional* para $S(t)$, si para todo $t \geq 0$, $S(t).X = X$. [Si $S(t)$ es inyectivo para todo $t > 0$, entonces $S(t).X = X$ para todo $t \in \mathbb{R}$, siendo $S(-t) = S(t)^{-1}, (t > 0)$].

3.1.3 Un *atractor* para $S(t)$ es un conjunto $\mathcal{A} \subset H$, *invariante funcional*, con la siguiente propiedad : existe $\mathcal{U} \subset H$, vecindad abierta de $\mathcal{A}$, tal que para todo $u_0 \in \mathcal{U}$, se tenga :

$$dist(S(t)u_0, \mathcal{A}) \to 0 \text{ cuando } t \to +\infty$$

3.1.4 Un *atractor global* para el semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un atractor compacto $\mathcal{A}$ que atrae uniformemente los conjuntos acotados de H. Esto es, si $\mathcal{B}$ es un subconjunto acotado de H, entonces $\text{dist}(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) \to 0$, cuando $t \to \infty$.

En el caso del péndulo con rozamiento (Ejemplo 1.1), el diagrama de fases permite visualizar fácilmente ω- límites, conjuntos invariantes y atractores. El origen ($\theta = 0, \varphi = 0$) es un atractor, pero no existe atractor global.

3.2. Una condición suficiente para la existencia de atractores.

El siguiente teorema ([13], Cap. I, Teorema 1.1) permite probar en muchos casos la existencia de atractores :

. *Supongamos que los operadores $S(t)$ son uniformemente compactos para t grande [esto es, para todo conjunto acotado $\mathcal{B} \subset H$, existe $t_0 > 0$, tal que el conjunto $\cup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{B}$ es relativamente compacto en H]. Supongamos también que existe $\mathcal{U} \subset H$ abierto, con un subconjunto $\mathcal{B}$ absorbente en $\mathcal{U}$. Entonces $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$ es un atractor compacto que atrae los conjuntos acotados de $\mathcal{U}$. Si $\mathcal{U}$ es convexo, entonces $\mathcal{A}$ es conexo.*

3.3. La ecuación de Navier-Stokes.

Veamos como se aplica el teorema anterior al caso de la ecuación de *Navier–Stokes* (n = 2).

3.3.1. Precisemos antes que para la forma trilineal b (definida luego de (1.2.5)) vale la siguiente desigualdad :

$$|b(u,v,w)| \leq c_1|u|^{1/2}|Au|^{1/2}\|v\||w|, \tag{3.3.1}$$

$$\forall u \in D(A), \qquad \forall v \in V, \qquad \forall w \in H$$

siendo $c_1 > 0$ constante conveniente (la demostración se encuentra en [8]). De aquí se deduce :

a) si $u \in D(A)$, entonces $B(u) \in H$ (el operador B se definió en (1.2.6));

b) si $u \in D(A)$, aplicando la desigualdad de Young se obtiene :

$$|(Bu, Au)| \leq \frac{\nu}{4}|Au|^2 + \frac{c_1}{\nu^3}|u|^2\|u\|^4 \tag{3.3.2}$$

3.3.2. En la primera ecuación de (1.2.8), tomemos producto escalar con Au (recuérdese que si $t > 0, u(t) \in D(A)$; obtenemos :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu|Au|^2 + (Bu, Au) = (f, Au) \tag{3.3.3}$$

Ahora, $|(f, Au)| \leq |f||Au| \leq \frac{\nu}{4}|Au|^2 + \frac{1}{\nu}|f|^2$, y, $\|u\| \leq \lambda_1^{-1/2}|Au|$, en donde $\lambda_1 > 0$ es el primer valor propio de A (ver 2.4); de estas desigualdades, junto con (3.3.2) y (3.3.3), obtenemos :

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu\lambda_1\|u\|^2 \leq \frac{2}{\nu}|f| + \frac{2c_1}{\nu^3}|u|^2 \tag{3.3.4}$$

Suponiendo que u_0 permanece acotado en H, se llega, usando el lema de Gronwall generalizado ([13], Cap. III, Lema 1.1), a la desigualdad :

$$\|u(t)\|^2 \leq (\frac{a_3}{r} + a_2)e^{a_1}, \qquad \text{si } t \geq t_0 + r, \tag{3.3.5}$$

en donde a_1, a_2, a_3, r son constantes convenientes y t_0 se escoge suficientemente grande.

De (3.3.5), usando la compacidad de la inyección $V \hookrightarrow H$, se sigue el siguiente resultado :

3.3.3 Teorema. *El sistema dinámico asociado a la ecuación de Navier – Stokes (n = 2) posse un atractor $\mathcal{A}$ compacto conexo maximal.*

La existencia de estos atractores fue mostrada por primera vez por Foias y Temam [3].

3.4. Dimensión de Hausdorff de los atractores.

En el caso de muchas ecuaciones disipativas, una propiedad muy importante de los atractores compactos es que tienen dimensión de Hausdorff finita (es el caso, por ejemplo, de la ecuación de *Navier – Stokes* para $n = 2$).

Si la dimensión de Hausdorff de $\mathcal{A}$ es $\leq N$, entonces "casi todos",los proyectores de dimensión $(2N + 1)$ son inyectivos (R. Mañé [9]).

Se sigue que el flujo sobre $\mathcal{A}$ puede parametrizarse por $(2N+1)$ parámetros, a lo más. Para realizar cómputos numéricos, una elección natural de parámetros es la elección de los puntos nodales (pero la elección más apropiada de parámetros es cuestión abierta). En [4], Foias y Temam muestran para la ecuación de *Navier – Stokes* que en varios casos, el comportamiento de las soluciones cuando $t \to +\infty$ queda determinado por su comportamiento en un conjunto finito de puntos $\mathcal{E}$ (puntos nodales), si la "densidad",de $\mathcal{E}$ en Ω es suficientemente grande. Por ejemplo : si para todo $x \in \mathcal{E}, u(x,t) \to \xi_x$ cuando $t \to \infty$, entonces $u(\cdot, t)$ tiende a una solución estacionaria única $(n = 2, 3)$; si para todo $x \in \mathcal{E}$, $u(x,t)$ tiende a una función periódica $p_x(t)$, de periodo T, cuando $t \to \infty$, entonces $u(x,t)$ tiende a una solución periódica de periodo T, para todo $x \in \Omega$ $(n = 2)$, etc.

§4. La Ecuacion de Kuramoto-Sivashinsky

Esta ecuación tiene la forma siguiente :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \nu\Delta^2 u + \Delta u + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ en } \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{4.0.1}$$

Se pueden considerar condiciones de contorno periódicas :

$$u(x + Le_i, t) = u(x,t), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad 1 \leq i \leq n, \tag{4.0.2}$$

en donde $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ representa la base canónica de $\mathbb{R}^n$. El problema se estudia entonces en $\Omega = (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}) \times \cdots \times (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$.

4.1. El caso de dimensión 1.

La teoría matemática del problema (4.0.1) aún no es completa en el caso $n \geq 2$ (ver [13], Cap. III, Sección 4.1). Vamos a hablar del caso $n = 1 : \Omega = (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$.

4.1.1. Por derivación (tomando $v = \frac{\partial u}{\partial x}$), (4.0.1) se nos transforma en :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \nu\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad (x,t) \in (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}) \times \mathbb{R}_+ \\ v(x,0) = v_0(x), \end{cases} \tag{4.1.1}$$

problema que se suplementa con las condiciones de periodicidad :

$$\frac{\partial^j v}{\partial x^j}(-\frac{L}{2}, t) = \frac{\partial^j v}{\partial x^j}(\frac{L}{2}, t), 0 \leq j \leq 3 \qquad (4.1.2)$$

4.1.2. Planteamiento funcional del problema.

a) Los espacios de Hilbert que se eligen para estudiar este problema son :

i) $H = \dot{L}^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} v(x)dx = 0\}$

ii) $V = \dot{H}^2_{per}(\Omega) = H^2_{per}(\Omega) \cap H$.

(Aquí, $H^2_{per}(\Omega)$ denota el espacio de las funciones v en $H^2(\Omega)$ con $v(\frac{L}{2}) = v(-\frac{L}{2})$).

b) Para el problema (4.1.1) se obtiene la existencia del semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores continuos en H : $S(t) : v_0 \to v(t)$, al menos para valores suficientemente pequeños de $\frac{L}{\sqrt{\nu}}$ ([13], Cap. III, Sección 4.1; [10]; ver también [8])

c) Se prueba también la existencia de un atractor maximal conexo y compacto $\mathcal{A}$ en H, para el sistema dinámico *asociado con soluciones impares* ([11]; [13], Cap. III, Sección 4.1; cálculos detallados se encuentran en [8]).

4.2. Comportamiento de las soluciones cuando $t \to \infty$.

Recientemente, F. Pinto [14] (ver [2]), usando métodos semejantes a los empleados en [4], mostró que en varios casos el comportamiento asintótico de las soluciones u de la ecuación de *Kuramoto–Sivashinsky* queda determinado por su comportamiento en un conjunto *finito* $\mathcal{E}$ de puntos nodales, suficientemente "denso":

a) Si dos soluciones estacionarias coinciden en $\mathcal{E}$, entonces coinciden en todo Ω (esto vale incluso para $n = 2, 3$)

b) Si para todo $x \in \mathcal{E}, u(x,t) \to \xi_x$ cuando $t \to \infty$, entonces $u(\cdot, t)$ converge a una solución estacionaria

c) Si u, v son dos soluciones tales que para todo $x \in \mathcal{E}$, $|u(x,t) - v(x,t)| \to 0$ cuando $t \to \infty$, entonces $[u(\cdot,t) - v(\cdot,t)] \to 0$ en la norma uniforme sobre Ω; esto vale también para el caso de soluciones de ecuaciones no homogéneas, con términos a la derecha f, g respectivamente, si $\lim_{t\to\infty} \|f(t) - g(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

d) Si para todo $x \in \mathcal{E}, u(x,t) \to p_x(t)$, siendo $p_x(t)$ una función periódica, entonces $u(\cdot, t)$ converge a una solución periódica.

Bibliografía

1. J.E Billoti and J.P. La Salle, *Dissipative periodic processes*, Bull. Am. Math. Soc. **77, N 6** (1971), 1082–1088.
2. L.M. Echeverry and F. Pinto, *Determination of the Solutions of the Kuramoto-Sivashinsky Equation by a Set of Nodal Values*, Preprint (1992).

3. C. Foias and R.Temam, *Structure of the set of stationary solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. **30** (1977), 149–164.
4. C. Foias and R. Temam, *Determination of the solutions of the Navier-Stokes equations by a set of nodal values*, Math. Comput. **43, N 167** (1984), 117–133.
5. J. Hale, *Functional Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences 3, Springer -Verlag, New York, 1977.
6. M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974.
7. L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Mecánica de Fluidos. Curso de Física Teórica*, vol. 6, Reverté, Barcelona, 1986.
8. J. Lesmes y F. Soriano, *Ecuaciones de evolución no lineales*, Apuntes Matemáticos, No. 19, Universidad de los Andes, Bogotá.
9. R. Mañé, *On the dimension of the compact invariant sets of certain nonlinear maps* , In : D. Rand (ed) Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980. LNM 898, Springer -Verlag, New York.
10. B. Nicolaenko and B. Scheurer, *Remarks on the Kuramoto-Sivashinsky equation*, Physica **12D** (1984), 391–395.
11. B. Nicolaenko, B. Scheurer and R. Temam, *Some global dynamical properties of the Kuramoto-Sivashinsky equations : Nonlinear stability and attractors*, Physica **16D** (1985), 155–183.
12. R. Temam, *Navier-Stokes Equations. Studies in Mathematics and its Applications 2*, North-Holland, Amsterdam, 1984.
13. R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Applied Mathematical Sciences 68*, Springer -Verlag, New York, 1988.
14. F. Pinto, *Criterios para encontrar soluciones estacionarias estables para la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky*, Tesis de Magister (1990), Universidad de los Andes, Bogotá.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE LOS ANDES, SANTAFÉ DE BOGOTÁ, COLOMBIA