

## SOBRE LA VELOCIDAD ASINTÓTICA DE PROPAGACIÓN DE UNA EPIDEMIA

IGNACIO MANTILLA PRADA

### §1. PRESENTACIÓN DEL MODELO

Consideremos una población en la que una determinada enfermedad, una epidemia, se ha propagado. Así, los individuos de nuestra población van a estar repartidos en tres clases disjuntas: [S], [I] y [R].

- [S] es la clase de los *susceptibles*. Éstos son aquellos individuos que pueden ser contagiados con la enfermedad.
- [I] es la clase de los *infectados*; es decir, aquéllos que han sido contagiados y pueden transmitir la enfermedad.
- [R] es la clase de los *removibles*: individuos que estuvieron enfermos y que ya no son transmisores de la enfermedad, bien sea porque se volvieron inmunes o porque han muerto.

Esta distribución de la población es aproximada por funciones  $S(x, t)$ ,  $I(x, t)$ ,  $R(x, t)$  que denotan las correspondientes densidades de las tres clases en la posición  $x$  y el tiempo  $t$ .

La propagación de la enfermedad pueden entonces describirse por medio del siguiente sistema de ecuaciones integrodiferenciales:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = -(k * I)(x, t) \cdot S(x, t) , \\ \frac{\partial I}{\partial t} = (k * I)(x, t) \cdot S(x, t) - \rho I(x, t) , \\ \frac{\partial R}{\partial t} = \rho I(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad > 0 , \end{cases} \quad (1.1)$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{cases} S(x, 0) = \bar{S} > 0 , \\ I(x, 0) = I_0(x) \geq 0, \quad I_0 \neq 0 \text{ y acotada} , \\ R(x, 0) = 0 , \end{cases} \quad (1.2)$$

donde

$$(k * I)(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x - \xi)I(\xi, t)d\xi$$

es la convolución de  $k$  con  $I$ ,

$$k(z) := \bar{k}V(z), \quad \bar{k} > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi)d\xi = 1, \quad V(z) = V(-z), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

$k$  se llama la *rata de infección* y  $\rho$  la *rata de mortalidad*.

El modelo (1.1)-(1.2) de propagación espacio-temporal de una epidemia en una población es una generalización del modelo de Kermack y McKendrick presentado en 1927 y nos devuelve al modelo propuesto por Kendall en 1965.

Para la propagación de la epidemia se exige la condición  $S > \rho/k$ ; es decir, la infección inicial se propagará sólo si el número inicial de susceptibles sobrepasa el umbral  $\rho/\bar{k}$ . De esta forma, el número de víctimas de la epidemia podrá ser positivo sólo si  $\bar{S} > \rho/\bar{k}$ . Este resultado es el conocido *teorema del umbral pandémico de Kendall*.

También es conocida la existencia y unicidad de la solución de (1.1) bajo las condiciones iniciales (1.2) (ver, por ejemplo, [Herr 1987]).

## §2. ONDAS VIAJERAS

Si ahora nos interesamos por soluciones de (1.1)-(1.2) en forma de *ondas viajeras*, es decir, soluciones en las cuales las variables que intervienen en el modelo pueden escribirse como funciones de  $z := x + ct$ ,  $c > 0$ , entonces llegamos al siguiente sistema de ecuaciones integrodiferenciales con sólo una variable:

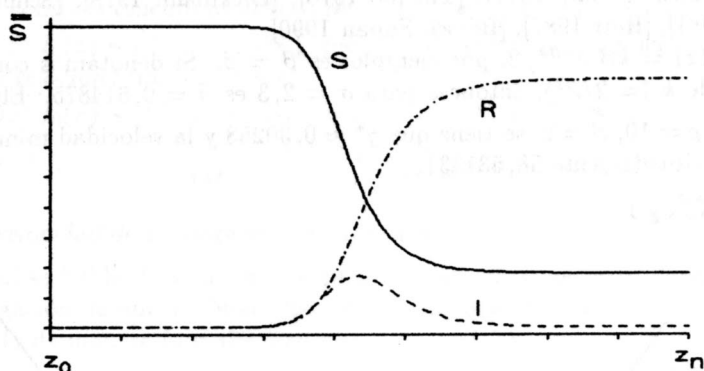
$$\begin{cases} S'(z) &= -\frac{1}{c}(k * I)(z)S(z), \\ I'(z) &= \frac{1}{c}(k * I)(z)S(z) - \frac{\rho}{c}I(z), \\ R'(z) &= \frac{\rho}{c}I(z), \quad z \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Este sistema va ser considerado bajo las condiciones de frontera:

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow -\infty} S(z) = S(-\infty) = \bar{S}, \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} I(z) = I(-\infty) = 0 = \lim_{z \rightarrow -\infty} R(z) = R(\infty). \end{cases} \quad (2.2)$$

Una solución de (2.2)-(2.3) será llamada *onda viajera de velocidad  $c$* .

Tales soluciones se ven como sigue:



La onda viajera se llama regular a izquierda si existen constantes positivas  $\gamma$  y  $q$  tales que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} I(z) e^{-\gamma z} = q.$$

$\gamma$  se llama rata de crecimiento. De manera análoga se define la regularidad a derecha de una onda viajera. La correspondiente rata se llama rata de extinción.

Para la existencia de soluciones no constantes de (2.1) se impone también la condición  $\bar{S} > \rho/\bar{k}$ .

El principal resultado en el estudio de ondas viajeras así definidas puede enunciarse como sigue:

**Teorema 2.1.** *Existe una constante  $c^* > 0$  de tal forma que: una condición necesaria y suficiente para la existencia de ondas viajeras no triviales de velocidad  $c$  es*

$$c \geq c^*$$

Para  $c > c^*$ , la onda viajera está determinada de manera única (salvo translación), es regular a izquierda y regular a derecha.

La rata de crecimiento  $\gamma_I$  de una onda viajera de velocidad  $c$  es la solución minimal de

$$c = \frac{1}{\gamma} \left\{ \bar{S} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) e^{\gamma \xi} d\xi - \rho \right\} =: \mathcal{C}(\gamma), \quad 0 < \gamma < \bar{\beta},$$

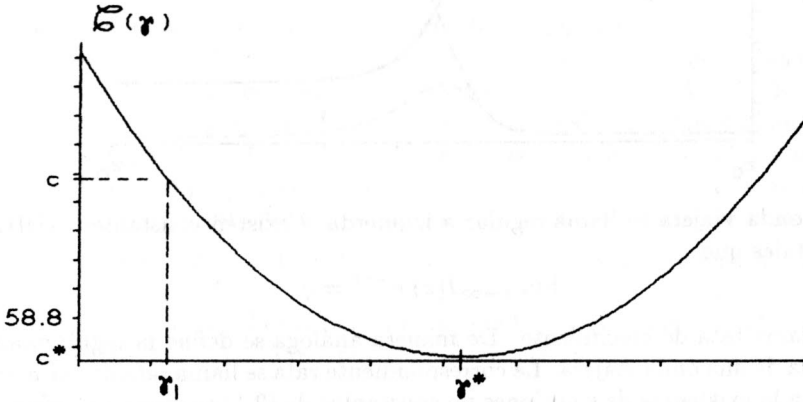
donde

$$\bar{\beta} = \sup \{ \mu \in \mathbb{R} : k(z) e^{\gamma z} \in L_1(\mathbb{R}) \text{ para todo } 0 < \gamma < \mu \}.$$

$C^*$  ( $= \mathcal{C}(\gamma^*)$ ) se llama la *velocidad minimal*.

Este resultado resume los trabajos de [Kendall 1965], [Atkinson & Reuter 1976], [Brown & Carr 1977], [Thieme 1978], [Dickmann 1978], [Schumacher 1980 & 1981], [Herr 1987], [Börsch-Supan 1990].

Para  $k(z) = \bar{k}\beta e^{-\beta z}/2$ , por ejemplo, es  $\bar{\beta} = \beta$ . Si denotamos con  $\sigma^2$  la varianza de  $k$  ( $= 2/\beta^2$ ), entonces para  $\sigma = 2, 3$  es  $\beta = 0, 614875$ . Eligiendo  $\bar{k} = 10, 5$ ,  $\rho = 10$ ,  $\bar{S} = 2$ , se tiene que  $\gamma^* \approx 0, 30258$  y la velocidad minimal de  $c^*$  es aproximadamente 58, 531331.



### §3. VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN Y CONVERGENCIA A UNA ONDA VIAJERA

Una pregunta importante que puede formularse ahora, es si la solución de nuestro modelo (1.1)-(1.2) converge (en algún sentido apropiado) a una onda viajera y, en caso afirmativo, cuál debe ser la velocidad de dicha onda viajera. Este interrogante tiene mucho sentido, pues para modelos que describen problemas similares con ecuaciones diferenciales parciales, existen tales afirmaciones. La convergencia a una onda viajera puede formularse en el siguiente sentido:

**Definición 3.1.** Decimos que la solución  $(S(x, t), I(x, t), R(x, t))$  del modelo (1.1)-(1.2) converge a una onda viajera  $(S_c(z), I_c(z), R_c(z))$  de velocidad  $c \geq c^*$ , si existe  $\delta \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |F(z - ct, t) - F_c(z + \delta)| = 0. \quad F \in S, I, R,$$

para cada  $z \in \mathbb{R}$  fijo, y uniformemente sobre  $z$ -intervalos compactos.

Esta definición es análoga a la que presenta [Larson 1978] para problemas que involucran ecuaciones diferenciales parciales.

Una respuesta al interrogante de la posible velocidad de la onda viajera en caso de tener convergencia en este sentido, es precisamente el resultado principal de este artículo: El comportamiento de la solución depende decisivamente del comportamiento asintótico de la distribución inicial de los infectados. Concretamente, tenemos:

**Teorema 3.2.** *La velocidad de propagación de la epidemia está determinada por el comportamiento asintótico de  $I_0(x)$  ( $x \rightarrow \infty$ ) como sigue:*

(a) Si  $I_0(x) \sim e^{\nu x}$  ( $x \rightarrow -\infty$ ), con  $\nu \geq \gamma^*$ , entonces la epidemia se propaga con la velocidad minimal  $c = c^*$ .

(b) Si  $I_0(x) \sim e^{\nu x}$  ( $x \rightarrow -\infty$ ), con  $0 < \nu < \gamma^*$ , entonces

$$C(\nu) = \frac{1}{\nu} \left\{ \bar{S} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) e^{\nu \xi} d\xi - \rho \right\}$$

es la velocidad de propagación de la epidemia.

Aquí se habla de velocidad de propagación. Este concepto de velocidad de propagación de una epidemia fue introducido por [Aronson 1978] y puede ser definido de manera formal como

$$\tilde{c} := \inf \{ c > 0 : \lim_{t \rightarrow \infty} R(z - ct) = 0 \}. \quad (3.1)$$

En otros términos, esto significa que si un observador se desplaza hacia  $-\infty$  con una velocidad menor que  $\tilde{c}$ , entonces en algún momento va a ser infectado; pero si su velocidad es mayor que  $\tilde{c}$  no se contagiará.

[Aronson 1978] muestra que para  $i_0 \geq 0$ ,  $I_0(x) = 0$  en  $(-\infty, x_0]$  para algún  $x_0 \in \mathbb{R}$ , e  $I_0 \not\equiv 0$  se cumple que  $\tilde{c} = c^*$ . El teorema 3.2 generaliza este resultado: la parte (a) del teorema afirma que para distribuciones iniciales  $I_0(x)$  de infectados que rápidamente tienden a cero para  $x \rightarrow -\infty$ , la epidemia se propaga con velocidad minimal  $c^*$ , pero para distribuciones iniciales más planas, con más infectados en una posición distante, la velocidad de propagación es mayor y está dada por  $C$ .

*Bosquejo de la prueba del teorema 3.2.* Definimos inicialmente

$$W(z, t) := R(z - ct, t);$$

de esta manera nuestro modelo (1.1)-(1.2) puede escribirse en la forma

$$\begin{cases} W_t &= Q_c[W] + \rho I_0(z - ct) \quad \text{en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ W(z, 0) &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.2)$$

donde

$$Q_c[W] := -cW_z - \rho W + E[W]$$

(aquí significa  $W_z = \frac{\partial}{\partial z} W$ ), y

$$E[W] := \rho \bar{S} \left( 1 - e^{-\frac{1}{\rho}(k * W)} \right).$$

Si se desea probar la parte (b) del teorema, debe entonces mostrarse que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} W(z, t) &= 0 \quad \text{para } c > C(\nu), \text{ y} \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} W(t, z) &> 0 \quad \text{para } 0 < c < C(\nu). \end{aligned} \quad (3.3)$$

La herramienta más importante utilizada en la prueba es el siguiente lema:

**Lema (de comparación) 3.3.** Sea

$$E : C_B^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) \rightarrow C_B^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$$

alguno de los operadores siguientes:

$$(i) \quad E[U](z, t) = \sigma_2 \left( 1 - e^{-\sigma_1(k * U)(z, t)} \right), \quad \sigma_1, \sigma_2 \geq 0,$$

o

$$(ii) \quad E[U](z, t) = (I * U)(z, t), \quad \text{con } 0 \leq I = I(z) \in L_1(\mathbb{R}).$$

Si  $U, \bar{U}, U_t, \bar{U}_t \in C_B^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ ,  $U, \bar{U} \geq 0$  y, además,

$$\bar{U}_t + \rho \bar{U} - E[\bar{U}] \geq U_t + \rho U - E[u] \text{ en } \mathbb{R} \times [0, +\infty) \quad (3.4)$$

y

$$\bar{U}(z, 0) > U(z, 0) \text{ en } \mathbb{R},$$

entonces

$$\bar{U} > U \text{ en } \mathbb{R} \times [0, +\infty).$$

Obsérvese que para el operador  $E$ , la parte izquierda de la desigualdad (3.4) es precisamente  $\bar{U}_t - Q_c[\bar{U}]$  (compare con (3.2)).

Vamos ahora a echar una mirada al bosquejo de la prueba de (3.3), para  $c^* \leq c < C(\nu)$ , por tratarse de la parte más difícil: Se construye una función  $\varphi(z)$  de tal manera que  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(z, t) = \alpha > 0$ , donde  $V$  es una solución de

$$\begin{cases} V_t & = Q_c[V] \text{ en } \mathbb{R} \times [0, +\infty), \\ V(z, 0) & = \epsilon \varphi(z) \text{ en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

siendo  $\epsilon$  positivo y suficientemente pequeño de tal manera que para un  $T$  suficientemente grande se satisfaga

$$W(z, t) \geq \epsilon \varphi(z) = V(z, 0).$$

Así tenemos

$$W_t - Q_c[W] = \rho I_0(z - ct) \geq 0 = V_t - Q_c[V]$$

y, del lema de comparación, podemos concluir que

$$W(z, t) \geq V(z, t - T) \text{ en } [T, \infty),$$

con lo que obtenemos lo deseado.  $\square$

El teorema (3.2) permite afirmar que en caso de tener convergencia de la solución de (1.1)-(1.2) a una onda viajera, su correspondiente velocidad depende del comportamiento asintótico de la población infectada inicialmente. Formalmente tenemos:

**Corolario 3.4.** La convergencia de la solución  $(S, I, R)$  de (1.1.) – (1.2) a una onda viajera  $(S_c(z), I_c(z), R_c(z))$  está determinada por el comportamiento asintótico de  $I_0(z)$  ( $x \rightarrow \infty$ ) como sigue:

(a) Si  $I_0(x) \sim e^{\nu x}$  ( $x \rightarrow -\infty$ ), con  $\nu \geq \gamma^*$ , entonces, en caso de converger la solución a una onda viajera, la velocidad de la onda es  $c = c^*$ .

(b) Si  $I_0(x) \sim e^{\nu x}$  ( $x \rightarrow -\infty$ ), con  $0 < \nu < \gamma^*$ , entonces, en caso de converger la solución a una onda viajera, la velocidad de onda es

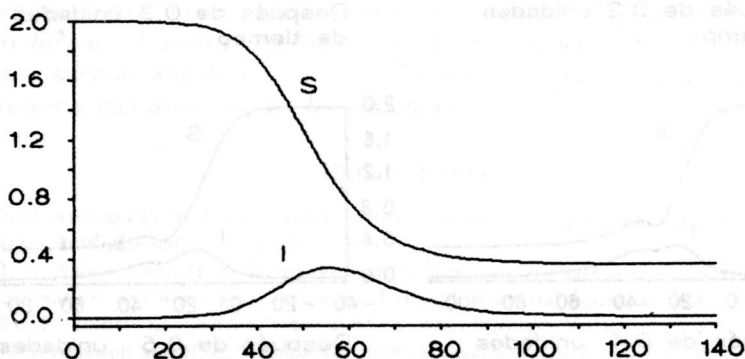
$$c = C(\nu) = \frac{1}{\nu} \left\{ \bar{S} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) e^{\nu \xi} d\xi - \rho \right\}.$$

La formulación de condiciones suficientes para la convergencia a una onda viajera es una pregunta aún sin respuesta, pero experimentos numéricos permiten conjeturar que se puede extender a condición suficiente el comportamiento asintótico de  $I_0$ , reemplazando en las partes (a) y (b) del corolario anterior la frase “en caso de converger” por la palabra “converge” (ver [Mantilla 1991]).

#### §4. ESTABILIDAD DE UNA ONDA VIAJERA

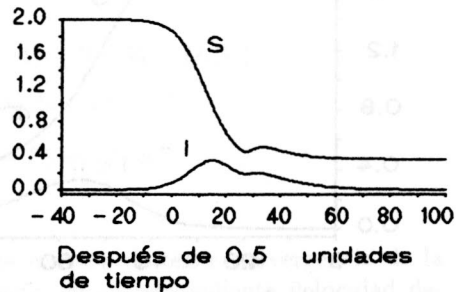
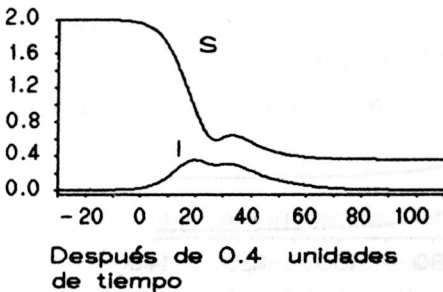
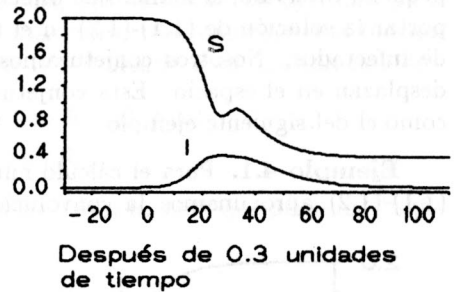
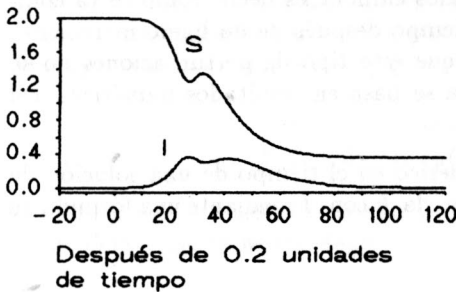
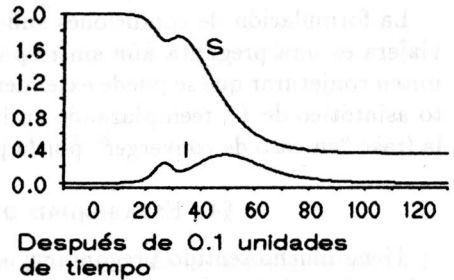
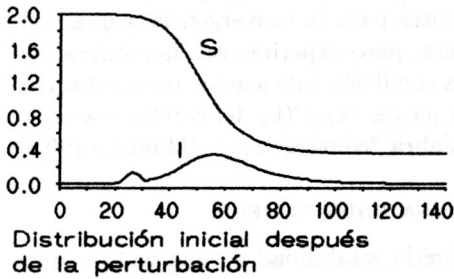
Tiene mucho sentido preguntarse sobre la estabilidad de una onda viajera, o formularse interrogantes como, por ejemplo, qué pasa en el tiempo si, en un pequeño intervalo, el número de infectados cambia; es decir, cómo se va comportar la solución de (1.1)-(1.2) en el tiempo después de un ligero incremento de infectados. Nosotros conjeturamos que este tipo de perturbaciones no se desplazan en el espacio. Esta conjetura se basa en resultados numéricos, tal como el del siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.1.** Para el cálculo numérico en el tiempo de una solución de (1.1)-(1.2), aproximamos la convolución de  $k$  con  $I$  mediante una fórmula de



cuadratura para integración numérica y a través de extrapolación exponencial por fuera del intervalo de integración. Para el cálculo aproximado de la solución

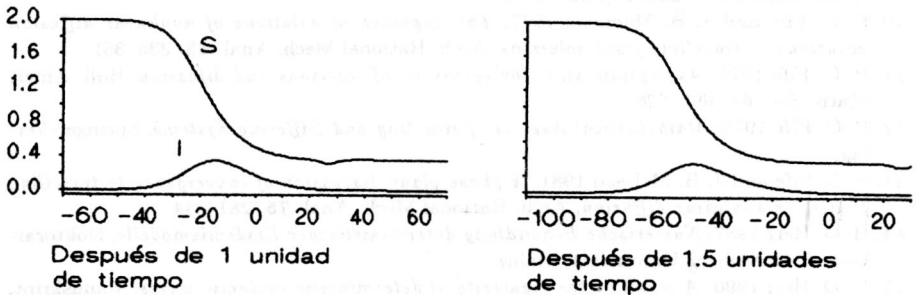
usamos un método predictor-corrector. Como predictor usamos el método de Euler y como corrector la regla del trapecio. Para  $k(z) = \bar{k}\beta e^{\beta z}/2$ , con  $\bar{k} = 10,5$ ,  $\beta = 0,614875$ ,  $\rho = 10$ ,  $\bar{S} = 2$  y tomando un intervalo  $[x_0, x_{140}]$ , en el cual  $I_0$  es cero salvo en el subintervalo  $[x_{112}, x_{140}]$ , donde es constante y de valor  $\epsilon = 10^{-5}$ , la solución de (1.1)-(1.2) después de 2 unidades de tiempo se ve como en la figura adjunta ( $x_0 = 0$ ,  $x_{140} = 140$ ). Ahora vamos a perturbar solamente la gráfica de  $I$  en el intervalo  $[20, 30]$ , aumentando los verdaderos valores, con el fin de observar el comportamiento de la función de infectados y de susceptibles para tiempos posteriores. La primera gráfica a continuación mostrará entonces esta perturbación y las siguientes el efecto que ésta ha tenido.



Las anteriores gráficas muestran cómo esta perturbación inicial se propaga y



cómo influye en la trayectoria de  $S$ . Obsérvese que el intervalo considerado va siendo trasladado hacia la izquierda con el fin de observar mejor el fenómeno. Por tal razón, el cálculo numérico debe hacerse en una especie de "grilla viajera". En cada una de las gráficas puede reconocerse la perturbación en la misma posición que la inicial. Si calculamos para tiempos aún mayores tenemos las siguientes gráficas:



Tal como se aprecia en la última gráfica, la perturbación inicial permanece aún en la misma posición, razón por la cual nos permitimos conjeturar que este tipo de perturbaciones no se desplazan; es decir, que el incremento del número de infectados en una zona, no va a tener, en el tiempo, ninguna influencia sobre la población que habita otras zonas.

En el anterior ejemplo puede observarse también la forma cómo la solución de (1.1)-(1.2), al aumentar el tiempo, se comporta como una onda viajera de velocidad minimal, lo cual ha motivado el interés en dar respuesta a la pregunta sobre la convergencia de esta solución a una onda viajera. Este ejemplo numérico ratifica una conjetura más en este sentido: Si  $I_0(x)$  es no negativa (pero diferente de cero en un conjunto de medida no nula), seccionalmente continua y, además, satisface  $|I_0(x)| \leq e^{\nu x}$  con  $\nu > \gamma^*$ , entonces la solución debe converger a una onda viajera de velocidad  $c = c^*$ .

#### BIBLIOGRAFÍA

1. D. G. Aronson 1978, *The asymptotic speed of propagation of a simple epidemic*, Research Notes in Mathematics 14, 1-23.
2. D. G. Aronson and H. F. Weinberger 1975, *Nonlinear diffusions in population genetics, combustion, and nerve propagation*, In: Partial Differential Equations and Related Topics (Ed. J. Goldstein). Lecture Notes in Math. 446, Springer-Verlag.
3. D. G. Aronson and H. F. Weinberger 1978, *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics*, Advances in Mathematics 30, 33-76.
4. C. Atkinson and G. E. Reuter 1976, *Deterministic epidemic waves*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 80, 315-330.

5. W. Börsch-Supan 1990, *Die asymptotische Entwicklung von Infektiven and Latenten*, Manuskript, J. Gutenberg-Universität, Mainz.
6. K. J. Brown and J. Carr 1977, *Deterministic epidemic waves of critical velocity*, Proc. Camb. Phil. Soc. **81**, 431-435.
7. O. Diekmann and H. G. Kaper 1978, *On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation*, Non Linear Analysis, Theory, Methods and Applications **2**, 721-737.
8. O. Diekmann 1978, *Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection*, J. Math Biology **6**, 109-130.
9. O. Diekmann 1979, *Run for your life: A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic*, J. Diff. Eq. **33**, 58-73.
10. P. C. Fife and J. B. MacLeod 1977, *The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions*, Arch. Rational Mech. Anal. **65**, 335-361.
11. P. C. Fife 1978, *Asymptotic state for equations of reactions and diffusion*, Bull. Amer. Math. Soc. **84**, 693-726.
12. P. C. Fife 1979, *Mathematical Aspects of Reacting and Differing Systems*, Springer-Verlag.
13. P. C. Fife and J. B. McLeod 1981, *A phase plane discussion of convergence to travelling fronts for nonlinear diffusion*, Arch. Rational Mech. Anal. **75**, 281-314.
14. H. O. Herr 1987, *Numerische Behandlung deterministischer Epidemiemodelle*, Doktorarbeit, J. Gutenberg-Universität, Mainz.
15. H. O. Herr 1990, *A result on the regularity of deterministic epidemic waves*, Manuskript, J. Gutenberg-Universität, Mainz.
16. D. G. Kendall 1965, *Mathematical models of a spread of infection*, In: Mathematics and Computer Science in Biology.
17. W. O. Kermack and A. G. McKendrick 1927, *A contribution to the mathematical theory of epidemics*, Proc. Roy. Soc. A **115**, 700-721.
18. D. A. Larson 1978, *Transient bounds and time-asymptotic behavior of solutions of nonlinear equations of Fisher type*, SIAM J. Appl. Math. **34** (1), 93-103.
19. I. Mantilla 1991, *Numerische Behandlung der zeitlich-räumlichen Entwicklung einer Epidemie*, Doktorarbeit, J. Gutenberg-Universität, Mainz.
20. I. Mantilla 1993, *Un modelo de propagación espacio-temporal de una epidemia*, Rev. Fac. Ciencias, Uni. Nal. Colombia **1**(3), 33-45, Medellín.
21. J. D. Murray 1989, *Mathematical Biology*, Springer-Verlag.
22. F. Rothe 1978, *Convergence to travelling fronts in semilinear parabolic equations*, Proc. Royal. Soc. Edinburgh **80A**, 213-234.
23. F. Rothe 1980, *Asymptotic behavior of the solutions of the Fisher equation*, In: Biological Growth and Spread. Lecture Notes in Biomathematics (Eds. W. Jäger, H. Rost, and P. Tautu) **38**, Springer-Verlag.
24. F. Rothe 1981, *Convergence to pushed fronts*, Rocky Mountain J. Math. **11**, 617-633.
25. K. Schumacher 1980(a), *Travelling front solutions for integro-differential equations (I)*, J. reine angew. Math. **316**, 54-70.
26. K. Schumacher 1980(b), *Travelling front solutions for integro-differential equations (II)*, Biological Growth and Spread. Lecture Notes in Biomathematics (Eds. W. Jäger, H. Rost, and P. Tautu) **38**, Springer-Verlag.
27. H. R. Thieme 1977, *A model for the spatial spread of an epidemic*, J. Math. Biology **4**, 337-351.
28. H. R. Thieme 1979, *Asymptotic estimates of the solutions of nonlinear integral equations and asymptotic speed for the spread of population*, J. reine angew. Math **306**, 94-121.
29. H. F. Weinberger 1978, *Asymptotic behavior of a model in population genetics*, In: Non-linear Partial Differential Equations and Applications (Ed. J. Chadam). Lecture Notes in Math. **648**, Springer-Verlag.

30. H. F. Weinberger 1980, *Some deterministic models for the spread of genetic and other alterations*, In: *Lectures notes in Biomath.* (Eds. W. Jäger, H. Rost, and P. Tautu) **38**, Springer-Verlag.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA,  
SANTAFÉ DE BOGOTÁ, COLOMBIA