Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen XXVII (1993), págs. 83–93

SOBRE LA ESTABILIDAD ASINTÓTICA DE UN PROBLEMA PARABÓLICO DE VALOR INICIAL

VLADIMIR MORENO Y BEATRIZ VILLA

ABSTRACT. **In this article we study the asymptotic stability of the solutions of an initial value semilinear problem of Dirichlet type. The linear part consists of an uniformly parabolic second order linear operator. The non-linearity is a T-periodic function on time, sufficiently regular. We consider the solutions of the associated periodic problem as the equilibrium state solutions.**

§1. INTRODUCCIÓN

Sea Ω un dominio acotado y suave en $\mathbb{R}^n$ y consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t + A(x,t,D)u = f(x,t,u) & \text{en } \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \bar{\Omega}, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde f es una función suficientemente regular, $T-$periódica en t, $T > 0$ dado y $\dfrac{\partial}{\partial t} + A(.,D)$ es un operador uniformemente parabólico. Nosotros estableceremos en este artículo condiciones que garanticen estabilidad asintótica de las soluciones de (1.1), considerando como soluciones de estado de equilibrio, las soluciones del problema periódico asociado:

$$\begin{cases} u_t + A(x,t,D)u = f(x,t,u) & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x,t+T) = u(x,t) & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Los problemas (1.1) y (1.2) han sido muy estudiados. Ver por ejemplo [2], [3], [4], [7] y [9]. Sobre la existencia de soluciones para el problema periódico (1.2), son clásicos los artículos de Kolesov [7] y H. Amann [3]. En estos artículos ellos establecieron el método de las super y subsoluciones para ecuaciones parabólicas

---

Key words and phrases. **Parabolic Differential Equations.**
Este trabajo ha sido financiado parcialmente por COLCIENCIAS y el CINDEC .

periódicas. En [9] y [4], Lazer y Lazer y Castro, respectivamente, estudiaron la existencia de soluciones de (1.2) para diversas condiciones sobre la parte no lineal f y sobre L, utilizando el método de las super y subsoluciones. En [4], Castro y Lazer, probaron que si la derivada parcial de f respecto a u es menor que el valor propio principal del operador $u_t + A(.,D)$, entonces (1.2) tiene una solución única, la cual es asintóticamente estable.

En este artículo, suponemos la existencia de una super y una subsolución de (1.1) y (1.2), estudiamos la estabilidad de las soluciones de (1.2) y obtenemos un resultado complementario de los obtenidos en [4] por Lazer y Castro.

Nuestro método consiste en la linealización del problema (1.1). Esencialmente el método se basa en el estudio de (1.1), mediante la consideración de las soluciones del problema lineal asociado:

$$\begin{cases} u_t + A(x,t,D)u = \dfrac{\partial f}{\partial u}(x,t,w(x,t))u(x,t) & \text{en } \Omega\times(0,\infty), \\ u(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,0) = \gamma_0(x) & \text{en } \bar{\Omega}, \end{cases} \tag{1.3}$$

donde w es una solución periódica, fija, de (1.2). Para cada $\gamma_0 \in L_p(\Omega)$, existe una única solución del problema (1.3). Esto conduce a la definición para cada $\bar{t} > 0$ del operador solución $\Phi_w(\bar{t}) \; : \; L_p(\Omega) \to L_p(\Omega)$. En el Teorema 4.1, establecemos condiciones suficientes sobre f, las cuales nos permiten afirmar, que al menos para los valores de $\bar{t}$, múltiplos del período T, el radio espectral de $\Phi_w(\bar{t})$ es menor que uno. Utilizaremos este resultado para estudiar la estabilidad de las soluciones de (1.1).

§2. Definiciones y resultados

Denotaremos por Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n, (n \geq 1)$, cuya frontera es una variedad de clase $C^{2+\mu}$, para algún $\mu \in (0,1)$, y Ω está situado localmente en un lado de $\partial\Omega$.

El operador $A(x,t,D)$ definido por:

$$A(x,t,D)u = -\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)D_iD_ju + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)D_iu + a_0(x,t)u\right), \qquad (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R},$$

satisface las condiciones:

A1. Los coeficientes a_{ij}, a_i y a_0 son funciones $\mu-$ Hölder continuas en $\Omega\times\mathbb{R}$, $T-$ periódicas en t. Suponemos además que $a_{ij} = a_{ji}$, $a_0(x,t) \leq 0$ y que existe una constante positiva m_0 tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq m_0|\xi|^2, \quad \xi = (\xi_1, ..., \xi_n),$$

para todo $(x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Consideremos el problema parabólico de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + A(x,t,D)u = f(x,t,u) & \text{en } \Omega \times (0,K],\ K > T \\ u(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega \times [0,K], \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \bar{\Omega}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Una función $\underline{u}$ es llamada una ***subsolución*** de (2.1), si $\underline{u} \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0,K]) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega} \times [0,K])$ y además satisface:

$$\underline{u}_t + A(x,t,D)\underline{u} \leq f(x,t,\underline{u}) \quad \text{en } \Omega \times (0,K], \tag{2.2}$$

$$\underline{u}(x,t) \leq 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times [0,K], \tag{2.3}$$

$$\underline{u}(.,0) \leq \underline{u}(.,T) \quad \text{en } \bar{\Omega}. \tag{2.4}$$

La noción de ***supersolución*** de (2.1), se define cambiando el sentido de las desigualdades arriba.

Supondremos las hipótesis siguientes:

A2. Existen $\underline{v}$ y $\bar{v}$, una subsolución y una supersolución de (2.1), respectivamente.

A3. La función $f(x,t,\eta) : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, $T-$periódica en t, tal que $f(.,.,\eta)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial \eta}(.,.,\eta) : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, son funciones μ -Hölder continuas, uniformemente para η en conjuntos acotados de $\mathbb{R}$.

A4. $\dfrac{\partial f}{\partial \eta}(.,.,\eta) - \lambda_0 < 0$, sobre $\bar{\Omega} \times [0,T] \times [-M.M]$, donde

$$M = \text{Sup}\ \{\|\underline{v}\|_\infty, \|\bar{v}\|_\infty\}$$

y λ_0 es el valor propio principal del operador $\dfrac{\partial}{\partial t} + A(.,D)$, (ver sección 4).

Por una solución *clásica* del problema (2.1), entendemos una función u tal que $u \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0,K]) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega} \times [0,K])$, y satisface las igualdades de (2.1) puntualmente.

Una solución *clásica* $u \in C^{2,1}(\Omega \times \mathbb{R})$ de (1.2), se define similarmente.

Remitimos al lector a los artículos [3] y [7], para un detallado estudio sobre la existencia de las soluciones de (2.1) y (1.2). En [3], Herbert Amann demuestra el teorema siguiente.

Teorema 2.1. *Supongamos que $\underline{v}$ es una subsolución y $\bar{v}$ es una supersolución de (2.1), tales que $\underline{v}(x,0) \leq \bar{v}(x,0)$ en Ω. Entonces existe al menos una solución periódica de (1.2), $w(x,t)$, tal que*

$$\underline{v}(x,t) \leq w(x,t) \leq \bar{v}(x,t).$$

Nosotros consideraremos las soluciones de (1.2), como soluciones de estado de equilibrio de (1.1). Denotaremos con $w(x,t)$ a una solución periódica de (1.2), fija, tal que $\underline{v}(x,0) \leq w(x,0) \leq \bar{v}(x,0)$ y con $w_0(x) := w(x,0)$. Probaremos el siguiente resultado acerca de la estabilidad asintótica de las soluciones de (1.1).

Teorema 2.2. *Supongamos que se satisfacen A1-A4. Entonces existen constantes positivas R, C, δ^* y t^*, tales que si $u_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $\underline{v}(x,0) \leq u_0(x) \leq \bar{v}(x,0)$ y $\|u_0 - w_0\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq R$. Entonces*

$$\|S(u_0)(t)(.) - w(.,t)\|_{C^{1+\lambda}(\bar{\Omega})} \leq Ce^{-\delta^* t}\|u_0 - w_0\|_{W^{2,p}(\Omega)} \tag{2.5}$$

para todo $t \geq t^*$ y para todo $p > \dfrac{n}{1-\lambda}$. En (2.5), $S(u_0)$ denota la solución del problema (1.1), correspondiente al valor inicial u_0.

Nota: El Teorema 2.2 es un resultado complementario del Teorema 5 dado en [4]. La desigualdad (2.5), nos permite profundizar más en el estudio la naturaleza de la convergencia de $S(u_0)(t) \to w(.,t)$ cuando $t \to \infty$, teniendo en cuenta que este estimativo está dado en la norma de $C^{1+\lambda}(\bar{\Omega})$. Por otra parte, nuestras hipótesis son equivalentes a las dadas en [4], por lo cual del Teorema 5 de [4] puede inferirse la unicidad de las soluciones periódicas de (1.2), tambien para nuestro caso.

§3. Teoría de Evolución

En lo que sigue los espacios vectoriales serán reales. Un procedimiento usual para estudiar el problema (1.2), consiste en considerar el problema de valor inicial abstracto:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{u}(t)}{dt} + \mathcal{A}(t)\tilde{u}(t) = F(t,\tilde{u}(t)), t \in (0,K], \; K > T, \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

donde la función $\tilde{u}(t)$ es considerada como una función en el espacio de Banach $(\mathbb{X}, \|\;\|_{\mathbb{X}}) := (L_p(\Omega), \|\;\|_p)$, donde $\|\;\|_p$ es la norma usual, $p > n$.

Con $\mathcal{A}(t)$ denotaremos al operador diferencial lineal $\mathcal{A}(t) : \mathcal{D}(\mathcal{A}(t)) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, inducido por A sobre $\mathbb{X}$, definido por $\mathcal{A}(t)\tilde{u}(t)(.) = A(.,t,D)\tilde{u}(t)(.)$. La función $F : [0,K] \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, está definida por $F(t,v)(x) = f(x,t,v(x))$, para todo $t \in [0,K], v \in \mathbb{X}$.

Las condiciones en la frontera y la suavidad de $\tilde{u}$ son consideradas al establecer el dominio de $\mathcal{A}(t)$. Denotamos por $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathcal{A}(t)) := W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

Una solución de (3.1), es una función $\tilde{u} \in C([0,K],\mathbb{X}_\alpha) \cap C^1((0,K],\mathbb{X})$ tal que $\tilde{u}(0) = \tilde{u}_0$, $\tilde{u}(t) \in \mathcal{D}$ para todo $t > 0$ y $\tilde{u}$ satisface las igualdades en (3.1), en el sentido del espacio $\mathbb{X}$

A continuación resumiremos algunos hechos importantes de la Teoría de Evolución, los cuales serán utilizados en lo que sigue, (cf. [3],[12]).

Es conocido que si A satisface A1, entonces:

B1. El operador $-\mathcal{A}(t)$ es el generador infinitesimal de un semigrupo analítico $\{e^{-\varphi\mathcal{A}(t)} \in \mathcal{L}(\mathbb{X}) \ /0 \leq \varphi < \infty\}$. Más aún, existen constantes positivas C y δ_0 tales que

$$\left\|e^{-\varphi\mathcal{A}(t)}\right\| \leq Ce^{-\delta_0 t}, \text{ para todo } 0 \leq \varphi < \infty, t \geq 0,$$

(cf. [12], sección 3; [3] sección 4).

B2. Asociado a la familia $\{-\mathcal{A}(t), t \geq 0\}$, existe un único sistema de evolución $U(t,\varphi)$ sobre $0 \leq \varphi \leq t \leq K$, tal que $U(t,\varphi) \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$, U es fuertemente continuo sobre la clausura del conjunto $\Gamma := \{(t,\varphi) \in [0,K]^2 \ /0 \leq \varphi \leq t \leq K\}$ y U satisface: $U(t,t) = Id$, $U(s,t)U(t,\varphi) = U(s,\varphi)$. Más aún, $U(s,t) : \mathbb{X} \to \mathcal{D}$, para $0 \leq t \leq s \leq K$.

Sean $\mathcal{A} := \mathcal{A}(0)$ y $\alpha > 0$, entonces por B1, se puede definir

$$\mathcal{A}^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\mathcal{A}t} dt,$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es la función Gamma, evaluada en α. El operador $\mathcal{A}^{-\alpha}$ es uno a uno y continuo sobre $\mathbb{X}$. Denotamos por $\mathcal{A}^\alpha := (\mathcal{A}^{-\alpha})^{-1}$, para cada $\alpha > 0$. El operador $\mathcal{A}^\alpha$ es cerrado y densamente definido en $\mathbb{X}$ y $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\alpha) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}^\beta)$, para todo $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$, donde $\mathcal{A}^0 = Id$.

Denotaremos con $\mathbb{X}_\alpha := (\mathcal{D}(\mathcal{A}^\alpha), \|\ \|_\alpha)$, donde $\|x\|_\alpha = \|\mathcal{A}^\alpha x\|_{\mathbb{X}}$, para todo $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\alpha)$ y $\mathbb{X}_0 = \mathbb{X}$. Para $\alpha > \frac{1}{2}$, $\mathbb{X}_\alpha$ está contenido en $C^{1+\lambda}(\bar{\Omega})$, donde $0 < \lambda < 2\alpha - 1 - \frac{n}{p}$, (cf. [3], Proposición 4.1). Con el símbolo $\|\ \|_{\alpha,\beta}$, denotaremos la norma en $\mathcal{L}(\mathbb{X}_\alpha, \mathbb{X}_\beta)$.

Una importante propiedad de regularidad para U, está dada por la desigualdad siguiente (cf.[3]):

$$\|U(t,s)\|_{\alpha,\beta} \leq C(\alpha,\beta,\sigma)(t-s)^{-\sigma}, \tag{3.2}$$

para $0 \leq \alpha \leq \beta < 1$, $0 \leq \beta - \alpha < \sigma < 1$. En el siguiente lema cuya prueba se debe a Herbert Amann, [3], se establece la existencia y unicidad de las soluciones de (3.1) y además una fórmula de variación de constantes:

Lema 3.1. *Si suponemos A1-A3, entonces para todo* $u_0 \in \mathcal{D}$ *tal que* $\underline{v}(.,0) \leq u_0 \leq \bar{v}(.,0)$, *el problema (3.1) tiene una única solución, denotada por* $S(u_0)(t)$. *La función* $S(u_0)$ *satisface la fórmula de variación de constantes:*

$$S(u_0)(t) = U(t,0)u_0 + \int_0^t U(t,s)F(s,S(u_0)(s))ds, \text{ para } 0 \leq t \leq K. \tag{3.3}$$

Más aún, la función $S(u_0)(t)(x)$ *es una solución clásica de (2.1).*

El siguiente lema es un resultado muy importante de regularización de las soluciones del problema (3.1), (cf.[3]).

Lema 3.2. *Sean $u_0, v_0 \in \mathcal{D}$, y supongamos que $\|S(u_0)(t)\|_\alpha, \|S(v_0)(t)\|_\alpha \leq \rho$, para $0 \leq t \leq K$. Entonces, para todo $\gamma \in [0,1]$, $\beta \in [\alpha, 1)$ y $\epsilon \in (0, 1-\beta)$,*

$$\|S(u_0)(t) - S(v_0)(t)\|_\beta \leq C(\rho, \beta, \gamma, \epsilon) t^{-\lambda} \|u_0 - v_0\|_\gamma, \tag{3.4}$$

para todo $0 \leq t \leq K$, donde $\lambda := \mathrm{Max}\,\{0, \beta - \gamma + \epsilon\}$.

§4. Linealización

Un método usual para el estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio en las ecuaciones diferenciales ordinarias, consiste en la linealización de la ecuación diferencial. Más específicamente, si se considera la ecuación diferencial en $\mathbb{R}^n$, $u' = f(u)$ y $\bar{u}$ es un punto de equilibrio ($f(\bar{u}) = 0$), entonces es un resultado muy conocido, que si todos los valores propios de la matriz $df(\bar{u})$, tienen parte real negativa, entonces $\bar{u}$ es asintóticamente estable. Nuestra meta es probar un resultado similar para ecuaciones de reacción- difusión.

Consideraremos las soluciones periódicas de (1.2), como soluciones de estado de equilibrio de (1.1).

Sean $w(t)x$ una solución de (1.2), fija y $w_0(x) := w(x, 0)$. Para $t > 0$ y $v \in \mathbb{X}$, denotamos por $df_v(t)$, al operador $df_v(t) : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, definido por $df_v(t)(g)(x) = \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, t, v(x))g(x)$, para todo $g \in \mathbb{X}$.

Consideremos el problema linealizado:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \gamma(t)}{\partial t} + \mathcal{A}(t)\gamma(t) = df_{w(t)}(t)\gamma(t), & t \in (0, K], \\ \gamma(0) = \gamma_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Una solución de (4.1) es una función $\gamma \in C([0,K], \mathbb{X}) \cap C^1((0,K], \mathbb{X})$ tal que $\gamma(t) \in \mathcal{D}$, para todo $t > 0$ y $\gamma(t)$ satisface (4.1) en el sentido de $\mathbb{X}$.

El lema siguiente se sigue fácilmente de la Teoría de los Sistemas de Evolución clásica. (Ver [10], Teorema 7.6.2).

Lema 4.1. *Supongamos A1-A3. Entonces, para todo $\gamma_0 \in \mathbb{X}$, existe una única solución de (4.1), denotada por $\mathcal{L}(\gamma_0)(t)$, definida para todo $t \geq 0$, tal que $\mathcal{L}(\gamma_0)(0) = \gamma_0$. Más aún, $\mathcal{L}(\gamma_0)(t)$ satisface la fórmula de variación de constantes:*

$$\mathcal{L}(\gamma_0)(t) = U(t,0)\gamma_0 + \int_0^t U(t,s) df_{w(s)}(s)\mathcal{L}(\gamma_0)(s)ds. \tag{4.2}$$

Lema 4.2. *Sean $\alpha \in (0,1)$ y $K > 0$, entonces existe $C = C(\alpha, K)$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $h \in \mathcal{D}, \|h\|_\alpha < \delta$ y $\underline{v}(.,0) \leq w_0 + h \leq \bar{v}(.,0)$, se satisface:*

$$\|S(w_0 + h)(t) - S(w_0)(t) - \mathcal{L}(h)(t)\|_\alpha \leq \epsilon C \|h\|_\alpha, \text{ para todo } t \in [0, K].$$

Demostración. Sean $M = \text{Max}\{\|\underline{v}\|_\infty, \|\bar{v}\|_\infty\}$ y $\epsilon > 0$. Es claro que existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|\eta_1 - \eta_2| < \delta_1$, entonces

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,t,\eta_1) - \frac{\partial f}{\partial \eta}(x,t,\eta_2)\right| < \epsilon, \text{ para todo } (x,t,\eta_i) \in \bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times[-M,M], i = 1,2.$$

Sean $\widetilde{w}(t) = S(w_0 + h)(t), w(t) = S(w_0)(t)$ y $\gamma(t) = \mathcal{L}(h)(t)$. Por el Lema 3.1,

$$\|\widetilde{w}(t)\|_\infty^{\bar{\Omega}}, \quad \|w(t\|_\infty^{\bar{\Omega}} \leq M$$

Del lema 3.2, obtenemos una constante $C^* = C^*(\alpha, K)$ y $\delta > 0$ tales que para $h \in \mathcal{D}$ y $\|h\|_\alpha < \delta$:

$$\|\widetilde{w}(t) - w(t)\|_\infty^{\bar{\Omega}} \leq C^* \|h\|_\alpha < \delta_1.$$

Además, por (3.2) y las fórmulas de variación de constantes (3.3) y (4.2), obtenemos que

$$\|\widetilde{w}(t) - w(t) - \gamma(t)\|_\alpha \leq$$

$$\int_0^t \|U(t,s)\|_{0,\alpha} \left\|F(s,\widetilde{w}(s)) - F(s,w(s)) - df_{w(s)}(s)[\widetilde{w}(s) - w(s)]\right\|_0 ds$$

$$+ \int_0^t \|U(t,s)\|_{0,\alpha} \left\|df_{w(s)}(s)(\widetilde{w}(s) - w(s) - \gamma(s))\right\|_0 ds$$

$$\leq \epsilon C^{**} \|h\|_\alpha \int_0^t (t-s)^{-\sigma} ds + K_1 \int_0^t (t-s)^{-\sigma} \|\widetilde{w}(s) - w(s) - \gamma(s)\|_\alpha ds,$$

donde $0 < \alpha < \sigma < 1$ y

$$K_1 = Sup\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,t,\eta)\right| : (x,t,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R} \times [-M,M]\right\}.$$

Finalmente de la desigualdad generalizada de Gronwall (cf. [3]), concluímos el resultado. ■

Si $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ y $\mathbb{Z}$ son espacios vectoriales, $\mathbb{Y}$ es un subespacio de $\mathbb{X}$ y Φ es un operador de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{Z}$, el símbolo $\Phi/\mathbb{Y}$, denotará la restricción de Φ a $\mathbb{Y}$, y con el símbolo $Spr(\Phi/\mathbb{Y})$, denotaremos el radio espectral de la restricción de Φ a $\mathbb{Y}$. En adelante $C_0(\bar{\Omega})$ y $C_0^1(\bar{\Omega})$, denotarán los conjuntos

$$C_0(\bar{\Omega}) = \left\{u \in C(\bar{\Omega}) \ : u \equiv 0 \text{ en } \partial\Omega\right\}, \quad C_0^1(\bar{\Omega}) = \left\{u \in C^1(\bar{\Omega}) \ : u \equiv 0 \text{ en } \partial\Omega\right\}.$$

Para cada $\bar{t} > 0$, definimos el operador $\Phi_w(\bar{t}) : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, por $\Phi_w(\bar{t})\gamma = \mathcal{L}(\gamma)(\bar{t})$.

Lema 4.3. *Supongamos A1-A3. Entonces*
a) Para $\bar{t} > 0$ *y* $0 \leq \alpha \leq \beta < 1$, $\Phi_w(\bar{t}) : \mathbb{X}_\alpha \to \mathbb{X}_\beta$ *es un operador lineal continuo.*
b) $\Phi_w(\bar{t}) : C_0(\bar{\Omega}) \to C_0(\bar{\Omega})$ *y* $\Phi_w(\bar{t}) : C_0^1(\bar{\Omega}) \to C_0^1(\bar{\Omega})$, *son operadores lineales compactos y fuertemente positivos.*
c) Existe $\bar{\lambda} > 0$ *tal que*

$$\bar{\lambda} = Spr(\Phi_w(\bar{t})/C_0^1(\bar{\Omega}))$$

y $\bar{\lambda}$ *es el único valor propio de* $\Phi_w(\bar{t})/C_0^1(\bar{\Omega})$ *con función propia positiva en* Ω. *Diremos que* $\bar{\lambda}$ *es el valor propio principal de* $\Phi_w(\bar{t})/C_0^1(\bar{\Omega})$.

Demostración. Dado $u_0 \in \mathbb{X}_\alpha$, $\Phi_w(\bar{t})u_0 = \mathcal{L}(u_0)(\bar{t})$. De (3.2), (4.2) y la desigualdad de Gronwall, concluímos a).

La compacidad de $\Phi_w(\bar{t})/C_0(\bar{\Omega})$ y $\Phi_w(\bar{t})/C_0^1(\bar{\Omega})$, es consecuencia de la siguiente cadena de inclusiones

$$C_0^1(\bar{\Omega}) \subseteq C_0(\bar{\Omega}) \subseteq \mathbb{X} \overset{\Phi_w(\bar{t})}{\to} \mathbb{X}_\beta \subseteq C_0^{1+\lambda}(\bar{\Omega}) \subseteq C_0^1(\bar{\Omega}) \subseteq C_0(\bar{\Omega}),$$

donde $\beta > \frac{1}{2}$ y $0 < \lambda < 2\beta - 1 - \frac{n}{p}$. Arriba todas las inclusiones son continuas y es un hecho muy conocido, que la inclusión $C_0^{1+\lambda}(\bar{\Omega}) \subseteq C_0^1(\bar{\Omega})$ es compacta, (cf.[5]). Si $u_0 \in \mathcal{D}$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \neq 0$, utilizando los teoremas de existencia y unicidad de Schauder, podemos probar que $\mathcal{L}(u_0)(t)(x) \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, K]) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega} \times [0, K])$. Entonces por el principio del máximo para ecuaciones parabólicas,[11],$\Phi_w(\bar{t})u_0 > 0$ en Ω. La densidad de $\mathcal{D}$ en $C_0(\bar{\Omega})$ y $C_0^1(\bar{\Omega})$, nos permite concluir b) por continuidad.

Consecuentemente por el Teorema de Krein -Rutman (cf. [8]), existe un único valor propio positivo $\bar{\lambda} := Spr(\Phi_w(\bar{t})/C_0^1(\bar{\Omega}))$, con función propia positiva $\bar{\psi}$, $\bar{\psi} > 0$, para todo $x \in \Omega$. Es decir, $\Phi_w(\bar{t})\bar{\psi} = \bar{\lambda}\bar{\psi}$ en Ω, $\bar{\psi}/\partial\Omega \equiv 0$. ∎

Sea L un operador diferencial de segundo orden, uniformemente parabólico, cuyos coeficientes satisfacen A1. En relación con el problema lineal periódico de valores propios:

$$\begin{cases} L[u] = \lambda u & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x, t+T) = u(x,t) & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}, \\ u \equiv 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.3}$$

es conocido (cf. Lazer [9]), que existe un único número real positivo λ, con la propiedad de que λ es el menor valor propio de (4.3) y es el único con función propia positiva en $\Omega \times \mathbb{R}$. El número λ es conocido como el valor propio *principal* de L.

Teorema 4.1. *Supongamos* $A1 - A3$. *Entonces*

$$Spr(\Phi_w(\bar{t})/C_0^1(\bar{\Omega})) = Spr(\Phi_w(\bar{t})/C_0(\bar{\Omega})) = Spr(\Phi_w(\bar{t})/\mathbb{X}_\alpha),$$

para todo $\alpha > 0$. Si suponemos además A4, entonces $Spr(\Phi_w(\bar{t})/\mathbb{X}_\alpha) < 1$, para todo $\bar{t} > 0$, múltiplo entero de T.

Demostración. En primer término observemos que

$$Spr(\Phi_w(\bar{t})/C_0^1(\bar{\Omega})) = Spr(\Phi_w(\bar{t})/C_0(\bar{\Omega})) = Spr(\Phi_w(\bar{t})/\mathbb{X}_\alpha).$$

Fácilmente se prueba que el espectro de $\Phi_w(\bar{t})/C_0(\bar{\Omega})$, $\Phi_w(\bar{t})/C_0^1(\bar{\Omega})$ y $\Phi_w(\bar{t})/\mathbb{X}_\alpha$ es puntual y que sus funciones propias pertenecen a $\mathcal{D}$. De lo cual concluímos que los espectros puntuales de estos operadores coinciden.

Denotaremos con $\mathbb{E} := \{u \in C^{2+\mu,1+\frac{\mu}{2}}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}) \ : u(x,t+T) = u(x,t)$ en $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ y $u \equiv 0$ en $\partial\Omega \times \mathbb{R}\}$, con la norma

$$\| \ \|_{\mathbb{E}} = \| \ \|_{C^{2+\mu,1+\frac{\mu}{2}}(\bar{\Omega}\times[0,T])}$$

y con $\mathbb{F} := \left\{u \in C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}) \ : u(x,t) \text{ es } T- \text{ periódica en } \ t\right\}$, con la norma:

$$\| \ \|_{\mathbb{F}} := \| \ \|_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{\Omega}\times[0,T])}.$$

Sean $\mathbb{L}_0$ y $\mathbb{L}_1 : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$, los operadores inducidos en $\mathbb{E}$, por los operadores L_0 y L_1, respectivamente, definidos por

$$L_0 u = \tfrac{\partial u(t)}{\partial t} + A(x,t,D)u$$

y

$$L_1 u = \tfrac{\partial u(t)}{\partial t} + A(x,t,D)u - \tfrac{\partial f}{\partial \eta}(x,t,w(t)x)u + \lambda_0 u.$$

Por A1, A3 y A4, existen λ_0 y $\lambda_1 > 0$, los valores propios principales de $\mathbb{L}_0$ y $\mathbb{L}_1$, respectivamente. Sean ψ_0 y ψ_1 sus funciones propias, tales que

$$\|\psi_0\|_\infty^{\bar{\Omega}\times\mathbb{R}} = \|\psi_1\|_\infty^{\bar{\Omega}\times\mathbb{R}} = 1.$$

Puesto que

$$\frac{\partial\psi_1(x,t)}{\partial t} + A(x,t,D)\psi_1(x,t) = \left[\lambda_1 - \lambda_0 + \frac{\partial f}{\partial \eta}(x,t,w(t)x)\right]\psi_1(x,t)$$

en $\Omega \times \mathbb{R}$, y

$$\frac{\partial\psi_0(x,t)}{\partial t} + A(x,t,D)\psi_0(x,t) = \lambda_0\psi_0(x,t)$$

en $\Omega \times \mathbb{R}$, por un resultado de comparación, obtenemos que $\lambda_1 > \lambda_0$, (ver [1], para el caso elíptico y [13], para el caso parabólico).

Para $\lambda^* := \lambda_1 - \lambda_0$, definimos $z(t)x := e^{-\lambda^* t}\psi_1(x,t)$. Es claro que $z(t)$ satisface la ecuación:

$$\frac{dz(t)}{dt} + \mathcal{A}(t)z(t) = df_{w(t)}(t)z(t), \quad z(0)x = \psi_1(x,0).$$

Por lo anterior, $z(t) = \Phi_w(t)\psi_1(.,0)$ y consecuentemente, para todo $\bar{t}$ múltiplo entero de $T, \Phi_w(\bar{t})\psi_1(.,0) = e^{-\lambda^*\bar{t}}\psi_1(.,0)$. Finalmente por la unicidad del valor propio principal, concluímos que :

$$e^{-\lambda^*\bar{t}} = Spr(\Phi_w(\bar{t})) < 1.$$

■

Demostración del Teorema 2.2. Sea $w(x,t)$ una solución periódica de (1.2). Por el Teorema 4.1, $\bar{\lambda} = Spr(\Phi_w(T)/\mathbb{X}_\alpha) < 1$. De la T-periodicidad de w, f y los coeficientes de A, concluímos que:

$$(\Phi_w(T))^j = \Phi_w(jT).$$

Sean $\bar{\lambda} < \mu_1 < 1$ y $\gamma_1 = -\ln(\mu_1)$. Puesto que

$$\bar{\lambda} = \lim_{j\to\infty}\left(\left\|(\Phi_w(T))^j\right\|_{\alpha,\alpha}\right)^{1/j} = \lim_{j\to\infty}\left(\|\Phi_w(jT)\|_{\alpha,\alpha}\right)^{1/j},$$

existe $N_0 > 0$, tal que si $j > N_0$, entonces:

$$\|\Phi_w(jT)\|_{\alpha,\alpha} \le e^{-\gamma_1 j}. \tag{4.4}$$

Tomemos ahora $\gamma^* < \dfrac{\gamma_1}{T}$ y $\hat{t} = N_1T \ge N_0T$, $\hat{t}$ suficientemente grande tal que $e^{-\hat{t}(\frac{\gamma_1}{T} - \gamma^*)} \le \frac{1}{2}$. Entonces por (4.4), tenemos que

$$\|\Phi_w(N_1T)h\|_\alpha \le \frac{1}{2}e^{-\gamma^*\hat{t}}\|h\|_\alpha \tag{4.5}$$

Además del Lema 4.2, para $\alpha \in (0,1)$ y $\epsilon = e^{-\gamma^*\hat{t}}(2C(\alpha,N,T))^{-1}$, obtenemos que existe un número $R > 0$ tal que si $h \in \mathcal{D}$ y $\|h\|_\alpha < R$, se satisface:

$$\|S(w_0+h)(t) - S(w_0)(t) - \Phi_w(t)h\|_\alpha \le \frac{e^{-\gamma^*\hat{t}}}{2}\|h\|_\alpha, \tag{4.6}$$

donde $C(\alpha,N,T)$, es la constante dada en el Lema 4.2. Consecuentemente, si $h \in \mathcal{D}$,
$\|h\|_\alpha \le R$ y $\underline{v}_0 \le w_0 + h \le \bar{v}_0$, de (4.5) y (4.6) obtenemos:

$$\left\|S(w_0+h)(t) - S(w_0)(t)\right\|_\alpha \le e^{-\gamma^*\hat{t}}\|h\|_\alpha. \tag{4.7}$$

Sea $\bar{B}_R(w_0) := \{u \in \mathcal{D} \;:\; \|u - w_0\|_\alpha \le R,\ \underline{v}_0 \le u \le \bar{v}_0 \text{ en } \Omega\}$. Por (4.6), para todo $u_0 \in \bar{B}_R(w_0)$, $S(u_0)$ está definida para todo $t \ge 0$. Más aún, si

$t \geq 3\hat{t} := t^*$, existen un entero positivo K_t y un número real $t_0 \in [\hat{t}, 2\hat{t}]$ tales que $t = K_t N_1 T + t_0$.

Para $h \in \mathcal{D}$, obtenemos por la $T-$ periodicidad de f y A que:

$$S(w_0 + h)(t) - S(w_0)(t) = S(S(w_0 + h)(K_t N_1 T))(t_0) - S(S(w_0)(K_t N_1 t))(t_0).$$

Ahora bien, sea $\beta > \frac{1}{2}$, puesto que $\|S(w_0)(t)\|_0$ y $\|S(w_0 + h)(t)\|_0$ son acotadas, por el Lema 3.2, obtenemos que para $\|h\|_\alpha \leq R$, y para todo $t_0 \in [\hat{t}, 2\hat{t}]$:

$$\begin{aligned} &\|S(S(w_0 + h)(K_t N_1 T))(t_0) - S(S(w_0)(K_t N_1 T))(t_0)\|_\beta \\ &\leq C(\beta, \sigma)(t_0)^{-\sigma} \|S(w_0 + h)(K_t N_1 T) - S(w_0)(K_t N_1 T)\|_0 \\ &\leq C(\beta, \sigma)(N_1 T)^{-\sigma} e^{-\gamma^* K_t N_1 T} \|h\|_\alpha \leq C e^{-\gamma^* t}, \end{aligned}$$

donde $\beta - \alpha < \sigma < 1$.

El resultado se sigue finalmente, de la inclusión $\mathbb{X}_\beta \subseteq C^{1+\lambda}(\bar{\Omega})$, para $0 < \lambda < 2\beta - 1 - n/p$. ■

References

1. S. Ahmad and A.C. Lazer,, *On the role of Hopf's Maximum Principle in Elliptic Sturmian Theory,*, Houston Journal of Mathematics, **5**, **No 2** (1979), 155–158..
2. N. D. Alikakos, P. Hess and H. Matano, *Discrete Order Preserving Semigroups and Stability for Periodic Parabolic Differential Equations*, Journal of Differential Equations **82** (1989), 322–341.
3. H. Amann, *Periodic Solutions of Semilinear Parabolic Equations*, Nonlinear Analysis, a Volume in honor of E. H. Rothe (1978), 1–29, Academic Press.
4. A. Castro and A.C. Lazer, *Results on Periodic Solutions of Parabolic Equations Suggested by Elliptic Theory*, Bolletino U. M. L. **6 1-B** (1982), 1089–1104.
5. A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1964.
6. A. Friedman, *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, 1969.
7. Ju. S. Kolesov, *A test for the existence of periodic solutions to parabolic equations*, Soviet Math. Dokl. **7** (1966), 1318–1320.
8. M. A. Rutman, *Linear Operators Leaving Invariant a cone in a Banach Space*, Amer. Math. Transl. **Serie 7** (1962), 199–325.
9. A. C. Lazer, *Some Remarks on Periodic Solutions of Parabolic Differential Equations, In Dynamical Systems II, Ed. Bednarek -Cesari*, 1982, pp. 227–246.
10. A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer -Verlag, New York, 1983.
11. M. H. Protter and H.F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
12. P. E. Sobolevskii, *Equations of Parabolic Type in a Banach Space*, Amer. Math. Serie 2 49 (1966), 1–62.
13. B. Villa, *Sobre un problema de valores propios para un sistema parabólico periódico y aplicaciones*, Revista Matemática Iberoamericana, Vol. 8, No. 3 (1992), 305–328.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, SANTAFÉ DE BOGOTÁ - COLOMBIA

E-mail: dc53738 @unalcol