Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen XXVII (1993), págs. 95–109

SOLUCIONES SIMETRICAS DE ALGUNOS PROBLEMAS ELÍPTICOS

JOSÉ RAÚL QUINTERO H.[1]

ABSTRACT. In this paper we study solutions to the Neumann problem

$$(I)\quad \begin{cases} \Delta u = F(u) & \text{in } \Omega \quad , \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} = G(u) & \text{on } \partial\Omega \quad , \end{cases}$$

and the Dirichlet problem

$$(II)\quad \begin{cases} \Delta u = F(u) & \text{in } \Omega \quad , \\ u = c & \text{on } \partial\Omega \quad , \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with a smooth boundary $\partial\Omega$, $\frac{\partial}{\partial \vec{\eta}}$ is the derivative with respect to the outward normal $\vec{\eta}$ and $c \in \mathbb{R}$. If Ω is the unit ball and if either $F(t) = f(t)$ and $G(t) = g(t)$ or $F(t) = f(t) \cdot t$ and $G(t) = g(t) \cdot t$ where f is a strictly increasing continuous function and g is a strictly decreasing continuous function, we prove that solutions to problems (I) and (II) are radially symmetric about the origen. If Ω is the unit ball and F is a continuous function that does not change sign, we prove that solutions of (II) are radially symmetric about the origen. If $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a symmetric bounded domain with respect to a hyperplane T and $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g \in C(\partial\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ are functions that satisfy the same monotonicity properties in the second variable as before, then we prove that solutions are symmetric with respect to the hyperplane T. If F satisfies the same condition as in the first case and $G \equiv 0$, we prove that the only solutions of (I) are constant functions. Furthermore, we find a formula for solutions of (I) in the unitary ball that allow us to deduce some non-existence results. We find conditions on F and G in order for (I) to have no solutions in any bounded domain.

[1] Financiado parcialmente por BID–ICFES y proyecto de Inv. COLCIENCIAS (No. 1106-05-002-90) .

§1. INTRODUCCIÓN

El método de reflexión de Alexandrov y el principio del máximo para operadores elípticos han sido usados para demostrar que las soluciones de algunos problemas elípticos con condición de Dirichlet sobre la frontera son radialmente simétricos con respecto al origen [ver[Al], [BN],[GQ], [GNN], [Se]]. En este artículo mostramos que esta técnica se puede usar con éxito para demostrar que las soluciones de algunos problemas elípticos con condición de Neumann sobre la frontera son radialmente simétricas con respecto al origen. Más concretamente, si $f, g \in C(\mathbb{R})$ son funciones estrictamente creciente y estrictamente decreciente respectivamente, demostraremos que las soluciones de los problemas elípticos con condición de Neumann y condición de Dirichlet sobre la frontera,

$$(I) \quad \begin{cases} \Delta u = F(u) & \text{en } B, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} = G(u) & \text{sobre } \partial B, \end{cases}$$

y

$$(II) \quad \begin{cases} \Delta u = F(u) & \text{en } B, \\ u = c & \text{sobre } \partial B, \end{cases}$$

donde B es la bola unitaria en $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ y $\dfrac{\partial}{\partial \vec{\eta}}$ denota la derivada normal exterior a ∂B, son radialmente simétricas con respecto al origen para $F(t) = f(t)$ y $G(t) = g(t)$ o $F(t) = f(t) \cdot t$ y $G(t) = g(t) \cdot t$.

Es importante observar que el problema (I) aparece naturalmente en el estudio de deformaciones conformes de la métrica estándar δ_{ij} sobre $\overline{B}$, con curvatura escalar en B y curvatura media sobre ∂B prescritas. En particular, si $u > 0$ en $\overline{B}$ es solución de (I) para las funciones , $F(t) = (\alpha t^{4/n-2} - \beta).t$ y $G(t) = (\gamma t^{2/n-2} - \zeta).t$, $\alpha, \beta, \gamma, \zeta \in \mathbb{R}$. Entonces podemos definir una métrica g sobre $\overline{B}$ conforme a la métrica estándar δ_{ij}, con curvatura escalar en B y curvatura media sobre ∂B constantes, de la siguiente manera,

$$g_{ij} = u^{4/n-2}\delta_{ij}.$$

(ver [Es].) Por otro lado, usando el Teorema (1) en [GNN], demostramos que las soluciones del problema elíptico con condición de Dirichlet sobre la frontera,

$$(III) \quad \begin{cases} \Delta u = h(u) & \text{en } B, \\ u = c & \text{sobre } \partial B, \end{cases}$$

donde $h \in C^1(\mathbb{R})$ es una función que no cambia de signo, son radialmente simétricas con respecto al origen.

Más aún, si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado con frontera suave y simétrico con respecto a un hiperplano T, entonces, utilizando los mismos argumentos usados en el caso de la bola unitaria, podemos extender nuestros resultados para funciones $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $g \in C(\partial\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ suponiendo adicionalmente condiciones de simetría con respecto al hiperplano T. En este caso las soluciones son simétricas con respecto a T(ver observación (1)).

Además, si suponemos que F satisface las mismas condiciones del problema (II) y Ω es un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ suave, demostramos que las soluciones del problema elíptico con condición de Neumann sobre la frontera

$$(IV) \quad \begin{cases} \Delta u = F(u) & \text{en } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

son constantes.

Cuando $F(t) = (\alpha t^{4/n-2} - \beta).t$, el problema (IV) es importante en el estudio de deformaciones conformes de métricas definidas sobre una variedad con frontera minimal(ver [Es]).

Finalmente, como una consecuencia del lema 1 en [GQ], obtenemos las identidades (1) y (2) que nos permiten demostrar algunos teoremas de no-existencia en la bola unitaria para el problema (I). Además independiente del resultado anterior encontramos una clase amplia de funciones reales F y G para las cuales el problema (I) no tiene soluciones clásicas no constantes en un dominio acotado Ω con frontera suave.

Este trabajo fue realizado dentro de las actividades del grupo de Topología y Geometría de la Universidad del Valle. Agradezco al profesor José Fernando Escobar su hospitalidad durante mi visita a Indiana University y sus valiosos comentarios en la versión final de este artículo.

§2. SIMETRÍA

Sea $u \in C^2(B) \bigcap C^0(\overline{B})$ una función y definamos la función auxiliar

$$v(x) = u(x'), \qquad x \in \overline{B}$$

donde x' es el reflejado de x con respecto al hiperplano $x_n = 0$. Un cálculo sencillo demuestra que

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= \Delta u(x'), & x \in B \\ \frac{\partial v(x)}{\partial \vec{\eta_x}} &= \frac{\partial u(x')}{\partial \vec{\eta}_{x'}}, & x \in \partial B \ . \end{aligned}$$

donde $\vec{\eta_x}$ denota el vector normal exterior a ∂B en x. Más aún

$$v(x) = u(x)\ , \qquad x \in \overline{B} \cap \{x_n = 0\}\ .$$

A continuación enunciaremos nuestros resultados de simetría.

Teorema A. *Sea $u \in C^2(B)\bigcap C^0(\overline{B})$ una solución del problema elíptico con condición de Neumann,*

$$\begin{cases} \Delta u &= f(u) \quad en \quad B\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} &= g(u) \quad sobre \quad \partial B\,. \end{cases}$$

Si $f \in C(\mathbb{R})$ es una función estrictamente creciente y $g \in C(\mathbb{R})$ es una función estrictamente decreciente. Entonces u es radialmente simétrica con respecto al origen.

Demostración. Sea v definida en $\overline{B}$ como antes y definamos la función

$$w(x) = u(x) - v(x)\,, \quad x \in \overline{B}\,.$$

Entonces w satisface,

$$\begin{cases} \Delta w &= f(u) - f(v) \quad \text{en } B\,, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \vec{\eta}} &= g(u) - g(v) \quad \text{sobre } \partial B\,. \end{cases}$$

Sean $x_m, x_M \in \overline{B}$ tales que

$$w(x_m) = \min{}_{\overline{B}} w \quad \text{y} \quad w(x_M) = \max{}_{\overline{B}} w\,.$$

Supongamos que $x_m \in \partial B$, y satisface que $w(x_m) < w(x)$, para todo $x \in B$. Entonces, $\dfrac{\partial}{\partial \vec{\eta}} w(x_m) \leq 0$. Por lo tanto,

$$g(u(x_m)) - g(v(x_m)) \leq 0.$$

Dado que g es estrictamente decreciente,

$$u(x_m) \geq v(x_m).$$

Es decir, $w(x_m) \geq 0$. Pero $w \equiv 0$ en $\overline{B} \cap \{x_n = 0\}$. Entonces la anterior desigualdad contradice nuestra suposición, pues $w(x_m) < 0$. Este hecho demuestra que $x_m \in B$. De manera análoga se demuestra que $x_M \in B$.

De otro lado, si $x_m, x_M \in B$, entonces

$$\Delta w(x_m) \geq 0 \quad \text{y} \quad \Delta w(x_M) \leq 0\,.$$

Utilizando la hipótesis impuesta a f concluimos que:

$$w(x_m) = w(x_M) = 0\,.$$

Es decir, $w \equiv 0$ en $\overline{B}$, o equivalentemente, $v(x) = u(x), \quad x \in \overline{B}$. En consecuencia, u es simétrica con respecto al hiperplano $x_n = 0$. Puesto que B es la bola unitaria y los argumentos se pueden extender a todas las direcciones, u es radialmente simétrica con respecto al origen.

Teorema B. *Sea $u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ una solución positiva en $\overline{B}$ del problema*

$$\begin{cases} \Delta u &= f(u) \cdot u \quad en \quad B \ , \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} &= g(u) \cdot u \quad sobre \quad \partial B \ . \end{cases}$$

Si $f \in C(\mathbb{R})$ es estrictamente creciente y $g \in C(\mathbb{R})$ es estrictamente decreciente, entonces u es radialmente simétrica con respecto al origen.

Demostración. Sea v definida en $\overline{B}$ como antes y definamos la función

$$w(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \ , \quad x \in \overline{B} \ .$$

un cálculo sencillo demuestra que w satisface

$$\begin{cases} \Delta w + \dfrac{2}{v} \nabla w . \nabla v &= (f(u) - f(v)) \cdot w \quad \text{en} \quad B, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \vec{\eta}} &= (g(u) - g(v)) \cdot w \quad \text{sobre} \quad \partial B \ , \\ w &\equiv 1 \text{ en } \quad \overline{B} \cap \{x_n = 0\} \ . \end{cases}$$

Sean $x_m, x_M \in \overline{B}$ tales que

$$w(x_m) = \text{mín}_{\overline{B}} w \quad \text{y} \quad w(x_M) = \text{máx}_{\overline{B}} w \ .$$

Usando la positividad de la función w y los mismos argumentos del teorema A, podemos suponer que $x_m, x_M \in B$. Más aún, dado que

$$\nabla w(x_m) = \nabla w(x_M) = \vec{0}, \quad \text{y} \quad w \quad \text{es positiva.}$$

Concluimos que $w \equiv 1$ en $\overline{B}$. Esto es, $u(x) = v(x)$ para todo $x \in \overline{B}$. En consecuencia, como en el teorema anterior, u es radialmente simétrica con respecto al origen.

Teorema C. *Sea $u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ una solución del problema elíptico con condición de Dirichlet,*

$$\begin{cases} \Delta u &= f(u) \quad en \quad B \ , \\ u &= c \quad sobre \quad \partial B \ . \end{cases}$$

Si $f \in C(\mathbb{R})$ es una función estrictamente creciente, entonces u es radialmente simétrica con respecto al origen.

Demostración. Sean v la función definida sobre $\overline{B}$ como antes y w la función definida así,

$$w(x) = u(x) - v(x) \ , \quad x \in \overline{B} \ .$$

Entonces,

$$\begin{cases} \Delta w(x) &= f(u(x)) - f(v(x)) \ , \quad x \in B \\ w(x) &= 0 \ , x \in \partial B \cup (\overline{B} \cap \{x_n = 0\}) \ . \end{cases}$$

Sean x_m y x_M puntos en $\overline{B}$ tales que

$$w(x_m) = \text{mín}_{\overline{B}} w \quad , \quad w(x_M) = \text{máx}_{\overline{B}} w \ .$$

Haciendo el mismo análisis a los puntos x_m y x_M como en el teorema A, el hecho de que la función f es estrictamente creciente y el pricipio del máximo se demuestra que

$$w \equiv 0 \qquad \text{en } B \ .$$

Por lo tanto, u es radialmente simétrica con respecto al origen.

Teorema D. *Sea $u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ una solución positiva en $\overline{B}$ del problema elíptico con condición de Dirich- let,*

$$\begin{cases} \Delta u &= f(u) \cdot u \quad en \ B \ , \\ u &= c \quad sobre \ \partial B \ . \end{cases}$$

Si $f \in C(\mathbb{R})$ es una función estrictamente creciente, entonces es radialmente simétrica con respecto al origen.

Demostración. Definamos v y w como en el teorema B. Entonces w satisface

$$\begin{cases} \Delta w + \dfrac{2}{v} \nabla w . \nabla v &= (f(u) - f(v)) \cdot w \quad \text{en} \quad B \ , \\ w &\equiv 1 \quad \text{sobre} \quad \partial B \cup (\overline{B} \cap \{x_n = 0\}) \ . \end{cases}$$

Sean $x_m, x_M \in \overline{B}$ tales que

$$w(x_m) = \text{mín}_{\overline{B}} w \quad \text{y} \quad w(x_M) = \text{máx}_{\overline{B}} w \ .$$

Usando los mismos argumentos del teorema C y la positividad de w, podemos concluir que

$$w \equiv 1 \text{ en } \overline{B} \ .$$

Uno de los resultados más interesantes en el estudio de soluciones simétricas en la bola fue obtenido por Gidas, Ni y Nirenberg (ver [GNN]). A continuación presentamos unos teoremas que se obtienen como una aplicación directa del teorema (1) en [GNN].

Teorema E. *Sea* $u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ *una solución del problema elíptico con condición de Dirichlet,*

$$\begin{cases} \Delta u &= h(u) \quad en \quad B \ , \\ u &= c \quad sobre \quad \partial B \ . \end{cases}$$

Si $h \in C^1(\mathbb{R})$ *no cambia de signo. Entonces* u *es radialmente simétrica con respecto al origen, y* $\dfrac{\partial}{\partial r}u \neq 0$, $0 < r < 1$.

En particular, si $f \in C^1(\mathbb{R})$ es tal que:

(i) f es estrictamente creciente (o decreciente) y $f(0) = 0$; ó

(ii) $f(t) > 0$ si $t > 0$ y $f(t) < 0$ si $t < 0$.

Entonces $h(t) = f(t).t$ no cambia de signo.

Más aún podemos obtener el mismo resultado suponiendo que $h \in C^1(\mathbb{R})$ y el máximo o el mínimo de u se alcanza en la frontera. Más concretamente,

Teorema F. *Sea* $h \in C^1(\mathbb{R})$. *Si* $u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ *es una función que satisface:*

(a) $\text{máx}_{\overline{B}} u = \text{máx}_{\partial B} u$ *ó* $\text{mín}_{\overline{B}} u = \text{mín}_{\partial B} u$,

(b)

$$\begin{cases} \Delta u &= h(u) \ en \ B \ , \\ u &= c \ sobre \ \partial B \ . \end{cases}$$

Entonces u *es radialmente simétrica con respecto al origen y* $\dfrac{\partial u}{\partial r} \neq 0$, $0 < r < 1$.

Observación 1. El método de reflexión utilizado en el estudio de soluciones simétricas de algunos problemas de Dirichlet y de Neumann sobre la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$, se puede extender de una manera completamente análoga a dominios más generales que la bola. En efecto, supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ suave que es simétrico con respecto a un hiperplano T.

1. Si $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $g \in C(\partial\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ son funciones tales que:
   (1) $f(.,t)$ y $g(.,t)$ son simétricas con respecto al hiperplano T para $t \in \mathbb{R}$,
   (2) $f(x,.)$ es estrictamente creciente y $g(x,.)$ es estrictamente decreciente para $x \in \Omega$ y $x \in \partial\Omega$, respectivamente,

   entonces las soluciones de los problemas elípticos con condición de Neumann y Dirichlet sobre la frontera

$$(I)' \quad \begin{cases} \Delta u &= F(x,u) \quad \text{en } \Omega \ , \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} &= G(x,u) \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \ , \end{cases}$$

y de Dirichlet

$$(II)' \qquad \begin{cases} \Delta u &= F(x,u) \quad \text{en } \Omega\ , \\ u &= c \quad \text{sobre } \partial\Omega\ , \end{cases}$$

son simétricas con respecto al hiperplano T para $F(x,t) = f(x,t)$ y $G(x,t) = g(x,t)$,o $F(x,t) = f(x,t)\cdot t$ y $G(x,t) = g(x,t)\cdot t$.

2. Como una consecuencia inmediata del colorario 1 de [GNN] se sigue que las soluciones del problema elíptico con condición de Dirichlet sobre la frontera

$$(III)' \qquad \begin{cases} \Delta u &= h(u) \quad \text{en } \Omega\ , \\ u &= c \quad \text{sobre } \partial\Omega\ , \end{cases}$$

donde $h \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ es una función tal que:
   (3) h_t es continua en $\Omega \times \mathbb{R}$,
   (4) $h(.,t)$ es simétrica con respecto al hiperplano T para $t \in \mathbb{R}$,
   (5) $h(x,.)$ no cambia de signo para $x \in \Omega$,
son simétricas con respecto al hiperplano T suponiendo que $h(.,t)$ es monótona en la dirección normal al hiperplano T para $t \in \mathbb{R}$. Es importante observar que, si la función h no depende de la variable $x \in \Omega$, entonces la propiedad de monotonía no es necesaria.

3. De los anteriores resultados se concluye que, si $f(.,t)$, $g(.,t)$, $h(.,t)$ son funciones radialmente simétricas con respecto al origen para cada $t \in \mathbb{R}$ que satisfacen las condiciones de monotonía impuesta en este artículo y Ω es la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$. Entonces las soluciones de los problemas $(I), (II), (III)$ son radialmente simétricas con respecto al origen.

§3. Un Resultado General

El análisis hecho a los puntos x_m y x_M en los teoremas relacionados con simetría, puede ser usado en dominios más generales. Más concretamente en los siguientes resultados :

Teorema G. *Sean Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ suave y $u \in C^2(\Omega) \cap C^o(\overline{\Omega})$ una función tales que:*

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) \quad en \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

si $f \in C(\mathbb{R})$ es estrictamente creciente. Entonces $u \equiv cte.$ en $\overline{\Omega}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(u)$ cambia de signo. En efecto, si $f(u)$ no cambia de signo, el principio del máximo implica que $\dfrac{\partial}{\partial \vec{\eta}} u(p) \neq 0$, donde $p \in \partial\Omega$ es tal que

$$u(p) = \max_{\overline{\Omega}} u \quad \text{ó} \quad u(p) = \min_{\overline{\Omega}} u.$$

Sea $x_o \in \Omega$ tal que $f(u(x_o)) = 0$. Sean x_m y x_M tales que

$$u(x_m) = \text{mín}_{\overline{\Omega}} u \quad \text{y} \quad u(x_M) = \text{máx}_{\overline{\Omega}} u.$$

Supongamos que x_m , $x_M \in \Omega$. Utilizando la hipóteis impuesta a la función f se sigue que: $u \equiv u(x_o)$ en Ω.

Estudiemos ahora el caso $x_m \in \Omega$ y $x_M \in \partial\Omega$ (ó $x_m \in \partial\Omega$ y $x_M \in \Omega$). En este caso,

$$\Delta u(x_m) = f(u(x_m)) \geq 0.$$

Dado que $u(x) \geq u(x_m)$ y f es estrictamente creciente, $\Delta u(x) = f(u(x)) \geq f(u(x_m)) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$. Aplicando el lema clásico de Hopf concluimos que

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\eta}} u(x_M) > 0,$$

a menos que u sea constante. En consecuencia, $u \equiv u(x_o)$ en $\overline{\Omega}$ puesto que $\frac{\partial}{\partial \vec{\eta}} u(x_M) = 0$. De manera completamente análoga se demuestra que $u \equiv u(x_o)$ en $\overline{\Omega}$ en el otro caso.

Supongamos ahora que x_m y $x_M \in \partial\Omega$. Sean Ω_+ y Ω_- los conjuntos abiertos definidos por

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : u(x) > u(x_o)\}$$
$$\Omega_- = \{x \in \Omega : u(x) < u(x_o)\}$$

Si Ω_+ o Ω_- es vacío. Entonces el principio del Máximo y el Lema de Hopf implican que $u \equiv u(x_o)$ en $\overline{\Omega}$. En efecto, supongamos que $\Omega_+ = \emptyset$. En consecuencia, $u(x) \leq u(x_o)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Más aún,

$$f(u(x) \leq f(u(x_o)) = 0 \quad , \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Por lo tanto,

$$\Delta u \leq 0 \quad , \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Aplicando el lema de Hopf y el principio del máximo,

$$u \equiv u(x_o) \qquad \text{para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

puesto que $\frac{\partial}{\partial \vec{\eta}} u(x_m) = 0$. Para $\Omega_- = \emptyset$ la demostración es análoga. Sólo resta estudiar el caso Ω_+ *y* Ω_- diferentes de vacío. En este caso,

$$u(x_m) < u(x_o) < u(x_M).$$

Esta desigualdad garantiza que x_m y x_M pertenecen a la parte suave de $\partial\Omega_-$ y $\partial\Omega_+$ respectivamente. De la definición de Ω_+ *y* Ω_- tenemos que:

$$\Delta u > 0 \quad \text{en } \Omega_+ \ \text{ y } \Delta u < 0 \quad \text{en } \Omega_-.$$

Usando una vez más el principio del máximo y el lema de Hopf,

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\eta}} u(x_m) < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \vec{\eta}} u(x_M) > 0,$$

pues u no es constante. El anterior hecho muestra que Ω_+ es vacío y Ω_- es vacío, y por lo tanto,

$$u \equiv u(x_o) \quad \text{en } \overline{\Omega}.$$

Teorema H. *Sean Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ suave y $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ una función positiva tales que*

$$\begin{cases} \Delta u &= f(u) \cdot u \quad en \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} &= 0 \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

Si $f \in C(\mathbb{R})$ es estrictamente creciente, entonces $u \equiv cte.$ en $\overline{\Omega}$.

La demostración de este resultado se obtiene utilizando los mismos argumentos del teorema G y usando la positividad de u.

Nota: Las conclusiones de los Teoremas B, D, H son válidas suponiendo sólo que la función $f \in C(\mathbb{R})$ es estrictamente creciente para $t > 0$.

§4. Resultados de No-existencia

En el estudio de problemas elípticos también es importante determinar en que casos dichos problemas no tienen soluciones interesantes. En esta sección obtenemos una identidad general(ver lema I) que nos permite encontrar condiciones suficientes para garantizar la no-existencia de soluciones de algunos problemas elípticos. En partícular, encontramos una nueva demostración del corolario (2.1) en [Es]. También caracterizamos una clase amplia de funciones F y G para las cuales el problema (I) no tiene soluciones no constantes en un dominio arbitrario Ω. El siguiente lema es una generalización de Rellich y Pohozaev.

Lema I. *Si $u \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$ es una solución de (I), $F \in C^{1,0}(\bar{B} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $G \in C(\partial B \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ entonces,*

$$\int_{\partial B} \left[G^2(x,u) - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \left(\frac{n-2}{2}\right) G(x,u)u - H(x,u) \right] d\sigma =$$

$$\int_B \left[\left(\frac{n-2}{2}\right) F(x,u)u - nH(x,u) - W(x,u) \right] dx. \qquad (1)$$

donde $H(x,t) = \int_0^t F(x,s)ds$ *y* $W(x,t) = \int_0^t \sum_{i=1}^n F_i(x,s) \cdot x_i \cdot ds$.

Demostración. De [GQ, lema 1] se sigue que:

$$\int_B \Delta u(\sum_{j=1}^n x_j u_j)dx = \left(\frac{n-2}{2}\right)\int_B |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\partial B} |\nabla u|^2 d\sigma$$

$$+ \int_{\partial B} G(x,u)^2 d\sigma. \qquad \text{(a)}$$

Pero para $1 \leq j \leq n$,

$$(H(x,u(x)))_j = H_j(x,u(x)) + H_t(x,u(x)) \cdot u_j(x).$$

En consecuencia de la definición de H se sigue que,

$$F(x,u(x)) \cdot u_j(x) = (H(x,u(x)))_j - \int_0^{u(x)} F_j(x,s)ds.$$

De la identidad de Green obtenemos que,

$$\int_B F(x,u)(\sum_{j=1}^n x_j u_j)dx = -n\int_B H(x,u)dx + \int_{\partial B} H(x.u)d\sigma$$

$$- \int_B W(x,u)dx. \qquad \text{(b)}$$

Además, la identidad de Green y (I) implican que :

$$\int_B |\nabla u|^2 \cdot dx = \int_{\partial B} \cdot\, G(x,u) \cdot u \cdot d\sigma - \int_B F(x,u) \cdot u \cdot dx. \qquad \text{(c)}$$

En consecuencia, igualando (a) y (b) y reemplazando (c) obtenemos nuestra identidad.

Observación 2. Si suponemos que u es radialmente simétrica con respecto al origen ó ∇u es normal a la frontera ∂B entonces $\|\nabla u(x)\| = |\frac{\partial u(x)}{\partial \vec{\eta}}|$ para todo $x \in \partial B$ y la identidad (1) se reduce a la siguiente:

$$\int_{\partial B}\left[\frac{1}{2}G^2(x,u) + \left(\frac{n-2}{2}\right)G(x,u)u - H(x,u)\right]d\sigma =$$

$$\int_B \left[\left(\frac{n-2}{2}\right)F(x,u)u - nH(x,u) - W(x,u)\right]dx\,. \qquad (2)$$

A continuación mostramos nuestro primer resultado de no-existencia por vía de las identidades (1) y (2).

Corolario J. *El problema semilineal elíptico*

$$(V)\qquad \begin{cases} \Delta u &= \frac{(n-2)}{4(n-1)}\cdot\alpha\cdot u^{\frac{n+2}{n-2}} \ en B,\\ \frac{\partial u}{\partial\bar\eta} &= \left(\frac{n-2}{2}\right)\cdot u\cdot\left[h\cdot u^{\frac{2}{n-2}}-1\right] \ sobre \partial B.\end{cases}$$

no tiene soluciones positivas, si $\alpha>0$ *y* $h\le\left(\frac{\alpha}{2n(n-1)}\right)^{\frac12}$. *Más aún, si* $\alpha>0$ *y* $h\le\left(\dfrac{\alpha}{n(n-1)}\right)^{\frac12}$, *entonces el problema elíptico* (V) *no tiene soluciones positivas radialmente simétricas con respecto al origen.*

Demostración. Si $h\le 0$ el resultado se sigue directamente del principio del máximo y el lema de Hopf. Supongamos que $h>0$ y que u es una solución positiva de (V). En este caso,

$$\begin{aligned} F(x,t)&=\frac{(n-2)}{4(n-1)}\cdot\alpha\cdot t^{\frac{n+2}{n-2}}, && (x,t)\in B\times\mathbb{R}^+,\\ G(x,t)&=\left(\frac{n-2}{2}\right)\cdot t\cdot\left[h\cdot t^{\frac{2}{n-2}}-1\right], && (x,t)\in\partial B\times\mathbb{R}^+,\\ W(x,t)&=0, && (x,t)\in B\times\mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

Entonces para $t>0$ y $x\in\bar B$,

$$H(x,t)=\frac{(n-2)^2}{8n(n-1)}\cdot\alpha\cdot t^{\frac{2n}{n-2}}.$$

Por lo tanto para $t>0$ y $x\in B$,

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)\cdot F(x,t)\cdot t-n\cdot H(x,t)-W(x,t)=0.$$

Ahora para $t>0$ y $x\in\partial B$,

$$G^2(x,t)+\left(\frac{n-2}{2}\right)G(x,t)t-H(x,t)=$$

$$\frac{(n-2)^2}{8}t^2\left[\left(2h^2-\frac{\alpha}{n(n-1)}\right)\cdot t^{\frac{4}{n-2}}-2h\cdot t^{\frac{2}{n-2}}\right].$$

De las hipótesis impuestas a h y α,

$$G^2(x,t)+\left(\frac{n-2}{2}\right)G(x,t)t-H(x,t)<0,\quad (x,t)\in\partial B\times\mathbb{R}^+.$$

Por lo tanto de la identidad (1) obtenemos una contradicción.

Si suponemos que u es una solución positiva radialmente simétrica entonces,

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)\cdot F(x,t)\cdot t - n\cdot H(x,t) - W(x,t) = 0, \quad (x,t)\in B\times\mathbb{R}^+.$$

Además para $t>0$ y $x\in\partial B$,

$$\frac{1}{2}G^2(x,t)+\left(\frac{n-2}{2}\right)\cdot G(x,t)\cdot t - H(x,t) =$$

$$\frac{(n-2)^2}{8}\cdot t^2\left[\left(h^2-\frac{\alpha}{n(n-1)}\right)\cdot t^{\frac{4}{n-2}}-1\right].$$

Entonces de la identidad (2) y de las condiciones impuestas sobre h y α obtenemos una contradicción como en el caso anterior.

Observación 3. Las identidades (1) y (2) nos permiten obtener un resultado más general que el Corolario J. En efecto, supongamos que $\alpha\in C(\bar{B})$ es positiva con $\nabla\alpha(x)\cdot x\le 0$ para todo $x\in B$ y $h\in C(\partial B)$. Entonces, el problema semilineal elíptico

$$(VI)\qquad \begin{cases} \Delta u &= \frac{(n-2)}{4(n-1)}\cdot\alpha(x)\cdot|u|^{\frac{4}{n-2}}\cdot u \quad\text{en}\quad B,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\vec{\eta}} &= \left(\frac{n-2}{2}\right)\cdot u\cdot\left[h(x)\cdot|u|^{\frac{2}{n-2}}-1\right]\quad\text{sobre}\quad\partial B.\end{cases}$$

no tiene soluciones, si $h(x)\le\left(\dfrac{\alpha(x)}{2n(n-1)}\right)^{\frac{1}{2}}$ para todo $x\in\partial B$. Más aún, si $h(x)\le\left(\dfrac{\alpha(x)}{n(n-1)}\right)^{\frac{1}{2}}$ para todo $x\in\partial B$, entonces el problema elíptico (VI) no tiene soluciones radialmente simétricas con respecto al origen.

La demostración de este resultado es completamente análoga a la de corolario J.

Nuestro último resultado, vía las identidades, caracteriza una clase de funciones F y G para las cuales el problema (I) no tiene soluciones radialmente simétricas con respecto al origen. En adelante vamos a suponer que $F\in C^{1,0}(\bar{B}\times\mathbb{R})$ y $G\in C(\partial B\times\mathbb{R})$ son tales que :

(i) $t\cdot F(x,t)>0$, para todo $(x,t)\in\bar{B}\times\mathbb{R}-\{0\}$.
(ii) $tF_t(x,t)\ge\left(\frac{n+2}{n-2}\right)\cdot F(x,t)$, para todo $(x,t)\in B\times\mathbb{R}$.
(iii) $\int_0^t\sum_{i=1}^n F_i(x,s)\cdot x_i ds\le 0$, para todo $(x,t)\in B\times\mathbb{R}$.
(iv) $G(x,t)\cdot[(n-2)\cdot t+G(x,t)]\le 0$, para todo $(x,t)\in\partial B\times\mathbb{R}$.

Con estas condiciones sobre F y G obtenemos el siguiente resultado,

Teorema K. *Si F y G satisfacen (i), (ii), (iii) y (iv) entonces el problema elíptico (I) no tiene soluciones radialmente simétricas con respecto al origen.*

Demostración. De (i) se sigue que, $H(x,t) > 0$ para todo (x,t) en $\bar{B} \times \mathbb{R} - \{0\}$. Por lo tanto, la anterior desigualdad y (iv) implican que,

$$\int_{\partial B} \left[\frac{1}{2} \cdot G^2(x,u) + \left(\frac{n-2}{2}\right) \cdot G(x,u) \cdot u - H(x,u)\right] \cdot d\sigma < 0.$$

Además integrando la condición (ii) y utilizando (iii) obtenemos que,

$$\left(\frac{n-2}{2}\right) \cdot t \cdot F(x,t) - n \cdot H(x,t) - W(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in B \times \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, de la identidad (2) obtenemos una contradicción.

Observación 4.

1. La conclusión del teorema K es válida si suponemos desigualdades contrarias en la hipótesis (i), (ii), (iii) y (iv).
2. Si suponemos las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv) solo para $t > 0$, entonces obtenemos un resultado de no existencia de soluciones positivas radialmente simétricas con respecto al origen para el problema (I).
3 Si reemplazamos la condición (iv) por,

$$\text{(iv)'} \quad G(x,t) \cdot [(n-2) \cdot t + 2G(x,t)] \leq 0, \quad (x,t) \in \partial B \times \mathbb{R}.$$

obtenemos el siguiente resultado,

Corolario L. *Si F y G satisfacen (i), (ii), (iii)'y (iv), entonces el problema elíptico (I) no tiene soluciones. Más aún, Si F y G satisfacen (i), (ii), (iii)' y (iv) para $t > 0$, el problema (I) no tiene soluciones positivas.*

El siguiente resultado de no-existencia es válido para dominios acotados arbitrarios en $\mathbb{R}^n$.

Teorema M. *Si $F(t).G(t) \leq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $G \in C(\mathbb{R}) - \{0\}$ es una función no-creciente. Entonces (I) no tiene soluciones clásicas no constantes.*

Demostración. Supongamos que existe $u \in C^2(\Omega) \cap C^o(\overline{\Omega})$ que satisface (I). Sea v la función definida por

$$v(x) = \int_0^{u(x)} G(t)d(t) \quad , x \in \overline{\Omega}.$$

Entonces, v no es una función constante, y

$$v_i = G(u).u_i$$

$$v_{ii} = G'(u).u_i + G(u).u_{ii}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \Delta v &= G'(u).|\nabla u|^2 + G(u).\Delta u \quad \text{en } \Omega. \\ &= G'(u).|\nabla u|^2 + G(u).F(u). \text{ en } \Omega. \end{aligned}$$

Usando las hipótesis sobre F y G obtenemos que

$$\Delta v \leq 0 \quad \text{en} \quad \Omega.$$

De otro lado, $\dfrac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} = G(u)\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} = G^2(u)$ sobre $\partial\Omega$. Entonces v satisface que:

$$(**) \qquad \begin{cases} \Delta v \leq 0 & \text{en}\Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} \geq 0 & \text{sobre}\partial\Omega, \end{cases}$$

Ahora, del principio del Máximo y el lema de Hopf, existe $x_o \in \partial\Omega$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\eta}} v(x_o) < 0.$$

La última desigualdad es una contradicción con (**). Por lo tanto, (I) no tiene soluciones clásicas.

REFERENCIAS

[Al]. A. Alexandrov, *Uniqueness theorems for surfaces in the large*, Vestnik Leningrado. Univ. **13** (1958).

[BN]. H. Beresticki and L. Nirenberg, *On the method of moving planes and the sliding method*, Preprint (1991).

[Es]. J. Escobar, *Uniqueness theorems on conformal deformations of metric, Sobolev inequalities, and an eigenvalue estimate*, Comm. Pure Appl. Math. **43** (1990).

[GQ]. G. García y J. Quintero, *Simetría y un estudio cualitativo de soluciones de algunos problemas elípticos con condición de Neumann*, Rev. Mat. Ens. Univ. **III, No 1** (1992).

[GNN]. B. Gidas, W. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. in Math. Phys. **68** (1979).

[PW]. M. Protter and H. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[Se]. J. Serrin, *A symmetry problem in potential theory*, Arch Ration. Mech. **43** (1971).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DEL VALLE, APARTADO AÉREO 25360, CALI, COLOMBIA