Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen XXVII (1993), págs. 111–125

CONVERGENCIA DE SUCESIONES DADAS POR FÓRMULAS DE RECURRENCIA DEL PRIMER ORDEN

YU TAKEUCHI

§1. INTRODUCCIÓN

Supongamos que la sucesión (X_n) satisface la fórmula de recurrencia

$$X_{n+1} = f(X_n) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

donde la función f está definida y es continua en un conjunto abierto A y $f(A) \subseteq A$. Si $(X_n) \longrightarrow L \in A$, entonces evidentemente se tiene que $f(L) = L$, o sea que L es un punto fijo de la función $f(x)$ en A. Recíprocamente si L es un punto fijo de $f(x)$ en A, y $f(x)$ es derivable en L, entonces sabemos que :

i) Si $|f'(L)| > 1$, entonces la sucesión (X_n) no converge al límite L, salvo en el caso trivial cuando (X_n) es una sucesión constante del valor L a partir de algún término.
ii) Si $|f'(L)| < 1$, entonces $(X_n) \longrightarrow L$ en una vecindad del punto L, más precisamente, existe $h > 0$ tal que $(X_n) \longrightarrow L$ dado cualquier $(X_1) \in (L - h, L + h)$.

En el presente trabajo, presentamos resultados similares para el caso general de una sucesión (X_n) que satisface la fórmula de recurrencia de primer orden

$$(X_{n+1}) = f_n(X_n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Como un caso particular , si las funciones $f_n(x)(n = 1, 2, \ldots)$, son de primer grado, sabemos el siguiente resultado:

Sea (X_n) dada por

$$(X_{n+1}) = a_n x_n + b_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) ,$$

donde $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$.

i) Si $|a| < 1$, entonces $(X_n) \longrightarrow \dfrac{b}{1-a}$ para cualquier valor de X_1.

ii) Si $|a| > 1$, entonces :

$$\begin{cases} (X_n) \longrightarrow +\infty & \textit{cuando} \quad X_1 > p, \\ (X_n) \longrightarrow \dfrac{b}{1-a} & \textit{cuando} \quad X_1 = p, \\ (X_n) \longrightarrow -\infty & \textit{cuando} \quad X_1 < p, \end{cases}$$

donde

$$p = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{a_1 a_2 \cdots a_k}$$

Nótese que si $f_n(x) = a_n x + b_n$, $f(x) = ax + b$, entonces $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en cualquier intervalo acotado, y que $\frac{b}{1-a}$ es el único punto fijo de la función límite $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

§2. Fórmula de recurrencia de primer orden. I. Convergencia en una vecindad

Supongamos que la sucesión (X_n) satisface la fórmula de recurrencia de de primer orden :

$$(X_{n+1}) = f_n(X_n) \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

donde las funciones f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ están definidas y son continuas en un conjunto abierto D de $\mathbb{C}$, y $f_n(D) \subseteq D$ (para todo $n = 1, 2, \ldots$). Supongamos que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ uniformemente en D, si la sucesión (X_n) converge al límite L en D, entonces:

$$f(L) = L,$$

pues por un conocido ejercicio del cálculo (Spivak, Calculus, 2^{nd} Ed. 1980, Cap 23, ejercicio 28) se tiene:

$$f_n(X_n) \longrightarrow f(L) \qquad (\text{cuando } n \to \infty).$$

Por otra parte, por hipótesis se tiene :

$$f_n(X_n) = X_{n+1} \to L \qquad (\text{cuando } n \to \infty) ;$$

en consecuencia, $f(L) = L$.

En caso de que $f_n(x) \to f(x)$ puntualmente, el límite L de la sucesión (X_n) no necesariamente es un punto fijo de $f(x)$, como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Sea

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n^2}{n+1} x & \text{en } [0, \dfrac{1}{n}] \\ nx - \dfrac{n}{n+1} x & \text{en } [\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n+1}] \\ \dfrac{n}{n+1} x & \text{si } x > \dfrac{2}{n+1} \\ 1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

entonces $f_n(x) \to f(x) = 1$ puntualmente en $\mathbb{R}$. Además, si $X_1 = 1$ entonces $(X_n) = \frac{1}{n}$, luego $(X_n) \to 0$. Pero 0 no es un punto fijo de $f(x)$.

Recíprocamente, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1. *Sea (X_n) la sucesión dada por la fórmula de recurrencia (1), donde las funciones $f_n(n = 1, 2, 3, \dots)$ están definidas y son continuas en un conjunto abierto D. Además supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en una vecindad del punto L, donde L es un punto fijo de la función $f(x)$ en D, si $|f'(L)| < 1$ entonces existen un número natural m y un conjunto abierto no vacío A_0 tales que*

$$(X_m, X_{m+1}, X_{m+2}, \dots,) \to L, \text{ si y sólo si } X_m \in A_0.$$

Demostración. Primero, recordemos el siguiente lema que es indispensable para la demostración del presente teorema:

Lema 1. *Sea (X_n) una sucesión de números (reales o complejos) que satisface la desigualdad:*

$$|X|_{n+1} \le a_n |X_n| + b_n \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

con $a_n > 0$, $b_n \ge 0$. Si $\overline{\text{lím}}\, a_n < 1$ y $b_n \to 0$ entonces $\text{lím}_{\,n\to\infty} X_n = 0$.

(Muestre por inducción que $|X_n|$ es acotada y tome $\overline{\text{lím}}$ en ambos lados de la desigualdad).

i) Como $|f'(L)| < 1$, podemos escoger un r con $|f'(L)| < r < 1$. Existe una vecindad de L, $V(L, \delta) = \{x \mid |x - L| < \delta\} \subseteq D$, tal que

$$\left| \frac{f(x) - L}{x - L} - f'(L) \right| < r - |f'(L)| \text{ en } V(L, \delta), \tag{2}$$

y

$$f_n(x) \to f(x) \text{ uniformemente en } V(L, \delta) . \tag{3}$$

De (2),

$$\left| \frac{f(x) - L}{x - L} \right| < |f'(L)| + (r - |f'(L)|) = r \text{ en } V(L, \delta),$$

o sea :

$$|f(x) - L| < r \cdot |x - L| \text{ en } V(L, \delta). \tag{4}$$

Sea

$$\epsilon_n = \sup_{|x-L|<\delta} |f_n(x) - f(x)| \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \; ; \tag{5}$$

entonces $\epsilon_n \to 0$ ya que $f_n \to f$ uniformemente en $V(L, \delta)$. De (4) y (5) en $V(L, \delta)$ tenemos la siguiente desigualdad :

$$|f_n(x) - L| \le |f(x) - L| + \epsilon_n < r \cdot |x - L| + \epsilon_n . \tag{6}$$

Sea m un número natural tal que

$$\epsilon_n < (1-r)\cdot\delta \quad \text{para todo } n \geq m\,; \tag{7}$$

entonces, para todo $n \geq m$ se obtiene :

$$|x-L| < \delta \quad \text{implica} \quad |f_n(x) - L| < r\cdot\delta + \epsilon_n < \delta. \tag{8}$$

En (6) y (8), reemplazando x por X_n, obtenemos:

$$\text{Si } X_m \in V(L,\delta) \text{ entonces } X_n \in V(L,\delta) \text{ para todo } n \geq m$$

y

$$|X_{n+1} - L| < r|X_n - L| + \epsilon_n \text{ para todo } n \geq m. \tag{9}$$

De (9), usando el Lema 1, se tiene que $(X_n) \to L$ (dado cualquier $X_m \in V(L,\delta)$), puesto que $0 < r < 1$, y, $\epsilon_n \to 0$. □

ii) Se definen las funciones continuas $F_m, F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots$, como sigue:

$$\begin{aligned} F_m &= I \text{ (función idéntica)},\\ F_n &= f_{n-1}\circ f_{n-2}\circ\cdots\circ f_{m+1}\circ f_m \quad (\text{para } n > m). \end{aligned}$$

Se observa que $F_{n+1} = f_{n-1}\circ F_n$ para todo $n \geq m$; F_{m+1} está definida en D y en general F_{n+1} está definida en $\{x \in D \mid F_n(x) \in D\}$. Nótese que los dominios de las funciones F_n ($n \geq m$) son subconjuntos abiertos de D, y que por (8) estos contienen a la vecindad $V(L,\delta)$. Sean

$$A_n = \{x \in D \mid F_n(x) \in V(L,\delta)\} = F_n^{-1}(V(L,\delta)) \quad (n \geq m)$$

entonces tenemos tambien por (8) que

$$A_{n+1} \supseteq A_n \qquad (n = m, m+1, m+2, \ldots).$$

Sea

$$A_0 = \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n,$$

entonces A_0 es un subconjunto abierto no-vacío de D.

Si $X_m \in A_0$, entonces $X_m \in A_k$ para algún $k \geq m$, luego $X_k = F_k(X_n) \in V(L,\delta)$ para algún $k \geq m$. Por (9) se tiene que $(X_k, X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots) \to L$, o sea que

$$(X_m, X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots) \to L\,.$$

Si $X_m \notin A_0$, entonces $X_m \notin A_n$ para 'todo' $n \geq m$, luego $X_n = F_n(X_n) \notin V(L,\delta)$ para todo $n \geq m$. Por lo tanto, la sucesión $(X_m, X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots)$ no converge a L. □

Corolario. *Si $f_n(D) \supseteq D$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces podemos escoger $m = 1$, o sea que existe un conjunto abierto no–vacío A_0 tal que $(X_n) = (X_1, X_2, X_3, \ldots) \to L$ si y sólo si $X_1 \in A_0$.*

Demostración. En la demostración del teorema 1, basta tomar F_n como sigue:

$$F_n = f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \cdots \circ f_m \circ (f_{m-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1). \quad \square$$

Nota 1. Si no se cumple la condición $f_n(D) \supseteq D$ entonces dado X_m es posible que no exista $X_1 \in D$ que satisfaga :

$$(f_{m-1} \circ f_{m-2} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(X_1) = X_m \ ;$$

por lo tanto, el conjunto A_0 mencionado en el corolario puede ser vacío (ver el siguiente ejemplo 2).

Nota 2. Si D es abierto y conexo y las funciones f_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ son inyectivas, entonces el conjunto A_0 es conexo. Especialmente en el caso de de las sucesiones reales, si D es un intervalo abierto (o $\mathbb{R}$), y f_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ son inyectivas, entonces A_0 es un intervalo abierto (o $\mathbb{R}$).

Ejemplo 2. Estudiemos la convergencia de la sucesión (X_n) dada por la fórmula de recurrencia $X_{n+1} = f_n(X_n)$, donde

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}, \qquad f_n(x) = f(x) + \frac{2}{\log(n+1)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Obsérvese que $f_n \to f$ uniformemente en $\mathbb{R}$, y que 0 es el único punto fijo de la función $f(x)$, y $|f'(0)| = 0 < 1$.

i) Sea $D = (-2, \infty)$ como $f_n(D) \subseteq D$ entonces a partir de cualquier $X_1 \in D$ podemos obtener la sucesión (X_n) de acuerdo con la fórmula de recurrencia $X_{n+1} = f_n(X_n)$. El punto 0 pertence al conjunto D, sin embargo la sucesión (X_n) no converge al límite 0; más precisamente :

$$(X_n) \to +\infty, \text{ para cualquier} X_1 \in D = (2, \infty).$$

En efecto, si $X_1 > -2$, entonces se demuestra, por inducción, que

$$X_n > \log(n+1) \qquad \text{para} \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \ ;$$

en primer lugar:

$$X_2 \geq -1.6 + \frac{2}{log2} = 1.285 \cdots > \log 3 = 1.098 \ldots .$$

Supongamos que

$$X_n > \log(n+1) \ ,$$

entonces

$$X_{n+1} > \log(n+1) - \frac{1}{\log(n+1)} + \frac{2}{\log(n+1)}$$
$$= \log(n+1) + \frac{1}{\log(n+1)} > \log(n+2)\ ,$$

puesto que

$$\frac{1}{\log(n+1)} > \frac{1}{n+1} > \log(1+\frac{1}{n+1}) = \log(n+2) - \log(n+1)\ .$$

ii) Sea $D = \mathbb{R}$, como $f_n(x)$ es continua, y de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ (para cada n), por el corolario del Teorema 1, existe un conjunto abierto no vacío A_0 tal que

$$(X_n) \to 0 \text{ si y sólo si } X_1 \in A_0.$$

Vamos a estudiar más detalladamente el comportamiento global de la sucesión (X_n).

Si $X_n < 0$ entonces $X_n < X_{n+1}$ ya que $x < f_n(x)$ para todo $x < 0$. En consecuencia, si $X_1 < 0$ existen las dos posibilidades siguientes:

a) $X_n < 0$ para todo n, luego la sucesión (X_n) es creiente y acotada por 0, por lo tanto : $(X_n) \to 0$ (nótese que 0 es el único posible límite).

b) Existe un k tal que $X_1 < X_2 < \cdots < X_{k-1} < 0 < X_k$. Entonces $X_n \geq 0$ para todo $k < n$, ya que $f_n(x) > 0$ para todo $x \geq 0$.

Supongamos que $X_n \to 0$ si $\tilde{X}_1 < X_1$ entonces la sucesión $(\tilde{X}_n)$ determinada por $\tilde{X}_{n+1} = f_n(\tilde{X}_n)$ converge tambien al límite 0. En efecto, $\tilde{X}_n < X_n$ para todo n, ya que la función $f_n(x)$ es creciente (para cada n). Si $\tilde{X}_k \geq 0$ para algún k, entonces $0 \leq \tilde{X}_n < X_n$ para todo $n > k$, por el método del *sandwich* se debe tener que $\tilde{X}_n \to 0$.

De lo anterior se deduce que como el conjunto A_0 es abierto y no vacío, entonces existe un $p < 0$ tal que

$$\begin{cases} (X_n) \to 0 & \text{si} \quad X_1 < p, \\ (X_n) \to \infty & \text{si} \quad X_1 \geq p, \end{cases}$$

o sea, $A_0 = (-\infty, p)$.

Ejemplo 3. Sean $f(x)$ como en el ejemplo 2, $f_n(x) = f(x) + c_n$ con $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$. Si la sucesión (X_n) satisface la fórmula de recurrencia $X_{n+1} = f_n(X_n)$ entonces:

$$|X_{n+1}| \leq |X_n| \cdot \frac{(X_n)^2}{(X_n)^2 + 1} + |c_n| \leq |X_n| + |c_n|.$$

En la desigualdad anterior, tomando $n = 1, 2, 3, \dots, k$ y sumando

$$|X_{k+1}| \leq |X_1| + \sum_{n=1}^{k} |c_n| \leq M,$$

donde $M = |X_1| + \sum_{n=1}^{k} |c_n|$, por lo tanto la sucesión (X_n) es acotada por M. Tenemos

$$\frac{(X_n)^2}{(X_n)^2 + 1} \leq \frac{M^2}{M^2 + 1}$$

luego

$$|X_{n+1}| \leq \frac{(X_n)^2}{(X_n)^2 + 1} \cdot |X_n|\,|c_n| \qquad (n = 1, 2, 3 \dots).$$

Como $\dfrac{M^2}{M^2+1} < 1, |c_n| \to 0$, aplicando el Lema 1 se tiene que $(X_n) \to 0$ para cualquier valor de X_1, o sea que el conjunto abierto A_0 correspondiente al punto fijo 0 de la función $f(x)$ es $A_0 = \mathbb{R}$.

§3. Fórmula de recurrencia de primer orden. II. Divergencia local

En el siguiente teorema, supongamos que las funciones $f_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ son de valor real y continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ o $\mathbb{R}$. Además, $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente en una vecindad del punto $L \in (a, b)$, donde L es un punto fijo de la función límite $f(x)$ en (a, b).

Teorema 2. *Sea (X_n) la sucesión dada por la fórmula de recurrencia (1), si $|f'(L)| > 1$ entonces existen un número natural m y un conjunto no vacío S_0, que es la unión contable de conjuntos cerrados, tales que $(X_m, X_{m+1}, X_{m+2}, \dots) \to L$ si y sólo si $X_m \in S_0$*

Demostración.

i) Como $|f'(L)| > 1$, entonces podemos escoger un r con $|f'(L)| > r > 1$. Existe un vecindad de L, $V(L, \delta) = \{x \mid |x - L| < \delta\} \subseteq (a, b)$, tal que

$$\left|\frac{f(x) - L}{x - L} - f'(L)\right| < |f'(L)| - r \text{ en } V(L, \delta), \tag{10}$$

$$f_n(x) \to f(x) \text{ uniformemente en } V(L, \delta). \tag{11}$$

De (10) tenemos :

$$\left|\frac{f(x) - L}{x - L}\right| > |f'(L)| - (|f'(L)| - r) = r \quad \text{en} \quad V(L, \delta),$$

o sea,

$$|f(x) - L| > r\,|x - L| > \quad \text{en} \quad V(L, \delta). \tag{12}$$

Sean
$$\epsilon_n = \sup_{x\in V(L,\delta)} |f_n(x) \to f(x)| \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{13}$$
entonces
$$\epsilon_n < (r-1)\cdot\delta \text{ para todo } n \geq m.$$
De (12) y (13) :
$$|f_n(x) - L| \geq |f(x) - L| - |f_n(x) - f(x)| > r\cdot|x - L| - \epsilon_n,$$
por lo tanto, para $n \geq m$ tenemos:
$$|f_n(x) - L| > |x - L| \qquad \text{si } \frac{\epsilon_n}{r-1} < |x - L| < \delta. \tag{15}$$
Sean
$$h_n = \text{máx}\left\{\frac{\epsilon_j}{r-1}; j = n, n+1, n+2, \dots\right\} \text{ (para } n \geq m),$$
entonces h_n es decreciente, y, $(h_n) \to 0$. De (15) tenemos :
$$|f_n(x) - L| > |x - L| \text{ si } h_n \leq |x - L| < \delta\ . \tag{16}$$
En (16) reemplazando x por X_n, y teniendo en cuenta que $X_{n+1} = f_n(X_n)$, tenemos:
$$|X_{n+1} - L| > |X_n - L| \text{ si } h_n \leq |X_n - L| < \delta\ ; \tag{16}$$
como (h_n) es "decreciente", entonces:
$$|X_n - L| < |X_{n+1} - L| < |X_{n+2} - L| < \dots,$$
así la sucesión $(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ se aleja del punto L y, para algún $j > n$, se llega a
$$h_m < |X_{n+j} - L|,$$
o sea que la sucesión $(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ no converge al límite, al restringir sus términos en la vecindad $V(L, \delta)$ (¡¡divergencia local !!).

ii) Sean
$$D_n = \{x \mid |x - L| \leq h_n\} \qquad (n \geq m); \qquad D = D_m\ ;$$
entonces podemos demostrar la siguiente contenencia:
$$f_n(D) \supseteq D \text{ para } n = m, m+1, m+2, \dots \tag{17}$$
En efecto, como $|f'(L)| > 1$ entonces $f'(L) > 1$ o $f'(L) < -1$.

Supongamos que $f'(L) > 1$; de (10) tenemos

$$\frac{f(x)-L}{x-L} > r > 1 \text{ en } D\ ;$$

luego:

$$f(L+h_n) - L > r \cdot h_m \text{ y } f(L-h_m) - L < -r \cdot h_m. \tag{18}$$

Si $n \geq m$ entonces $h_n \leq h_m$; en (16) tomando $x = L \pm h_m$ se obtiene:

$$|f_n(L \pm h_m) - L| > h_m\ . \tag{19}$$

Si $f_n(L+h_m) - L < -h_m$, de la primera desigualdad de (18) se tendría que

$$f(L+h_m) - f_n L + h_m) > (r+1) \cdot h_m \geq \frac{r+1}{r-1} \cdot \epsilon_n > \epsilon_n,$$

lo cual contradice a la definición de ϵ_n dada en (13); por lo tanto, se debe tener que

$$f_n(L+h_m) - L > h_m\ . \tag{20}$$

De la misma forma, de (18) y (19) obtenemos:

$$f_n(L-h_m) - L < -h_m\ . \tag{21}$$

Como f_n es continua en $D = [L-h_m, L+h_m]$, por el teorema del valor intermedio la función $f_n(x)$ toma cualquier valor entre $L-h_m$ y $L+h_m$ lo cual demuestra la contenencia dada en (17).

En el caso $f'(L) < -1$, de (10):

$$\frac{f(x)-L}{x-L} < -r < -1 \text{ en } D\ ;$$

luego

$$f(L+h_m) - L < -r \cdot h_m \ y\ f(L-h_m) - L > r \cdot h_m. \tag{18'}$$

De (18') y (19), usando la definición de ϵ_n dada en (13), se obtiene:

$$f_n(L+h_m) - L < -h_m \text{ y } f_n(L-h_m) - L > h_m\ .$$

Así por el teorema del valor intermedio se demuestra la contenencia (17).

iii) Sean

$$\begin{aligned} E_n &= \{x \in [a,b] \mid (f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \cdots \circ f_{m+1} \circ f_m)(x) \in (D_n)\} \\ &= (f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \cdots \circ f_{m+1} \circ f_m)^{-1}(D_n) \text{ para } n > m, \\ E_m &= D = (D_m), \end{aligned}$$

evidentemente E_n es cerrado. Sean:

$$\tilde{f}_n = f_n \mid D$$
$$\tilde{E}_n = \{x \in [a,b] \mid (\tilde{f}_{n-1} \circ \tilde{f}_{n-2} \circ \cdots \circ \tilde{f}_{m+1} \circ \tilde{f}_m)(x) \in D_n\} \text{ para } n > m,$$
$$\tilde{E}_m = E_m = (D),$$

entonces se tiene inmediatamente que

$$E_n \supseteq \tilde{E}_n \qquad \text{para todo } n \geq m. \tag{22}$$

Se observa que $\tilde{E}_n$ es cerrado y no-vacío (por (17)). Tenemos:

$$\tilde{E}_{n+1} \subseteq \tilde{E}_n, \tag{23}$$

en efecto, si $x \in \tilde{E}_{n+1}$, entonces

$$(\tilde{f}_{n-1} \circ \tilde{f}_{n-2} \circ \cdots \circ \tilde{f}_{m+1} \circ \tilde{f}_m)(x) \in D_{n+1} \subseteq D_n,$$

esto es,

$$\tilde{f}_n((\tilde{f}_{n-1} \circ \tilde{f}_{n-2} \circ \cdots \circ \tilde{f}_{m+1} \circ \tilde{f}_m)(x)) \in D_n,$$

así, de (16) se tiene que

$$(\tilde{f}_{n-1} \circ \tilde{f}_{n-2} \circ \cdots \circ \tilde{f}_{m+1} \circ \tilde{f}_m)(x) \in D_n \qquad \text{esto es, } x \in \tilde{E}_n.$$

(Nótese que la desigualdad (16) es solamente válida en $|x - L| < \delta$, por esta razón no siempre se cumple la contenencia $E_{n+1} \subseteq E_n$.)

Sean

$$S_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n \ (k = m, m+1, m+2, \ldots), \qquad S_0 = \bigcup_{k=m}^{\infty} S_k \ ;$$

entonces de (22) y (23) y el teorema del encaje de Cantor se tiene que

$$S_k \supseteq \bigcap_{n=k}^{\infty} \tilde{E}_n \neq \emptyset \,.$$

iv) Si $X_m \in S_0$ entonces $(X_m, X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots) \to L$. En efecto, tenemos que $X_m \in S_k = \cap_{n=k}^{\infty}$ para algún k ($\geq m$), o sea,

$$X_m \in E_n \ \text{ para todo } n = k, k+1, k+2, \ldots$$

esto es:

$$X_n = (f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \cdots \circ f_{m+1} \circ f_m)(X_m) \in (D_n) \ \text{para todo } n \geq k,$$

o sea:

$$|X_n - L| \leq h_n \text{ para todo } n \geq k,$$

por lo tanto, $(X_m, X_{m+1}, X_{m+2}, \dots) \to L$.

v) Si $X_m \notin S_0$ entonces $(X_m, X_{m+1}, X_{m+2}, \dots)$ no converge al límite L. En efecto, tenemos que $X_m \notin S_k$ para todo $k = m, m+1, m+2 \dots$, esto es, para cualquier $k \geq m$ existe algún $n \geq k$ tal que :

$$X_m \notin E_n \text{ esto es, } X_n = (f_{n-1} \circ \cdots \circ f_m)(X_m) \notin D_n \ ,$$

o sea:

$$|X_n - L| > h_n.$$

De (16), por el fenómeno de la *divergencia local* se tiene que $X_{n+j} \notin D$ para algún j, por lo tanto la sucesión $(X_m, X_{m+1}, X_{m+2}, \dots)$ no converge al límite L □

Corolario. *Si $f_n([a,b]) \supseteq [a,b]$ o $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots$ entonces podemos escoger $m = 1$, o sea que existe un conjunto no vacío S_0, que es la unión contable de conjuntos cerrados, tal que*

$$(X_n) = (X_1, X_2, X_3, \dots) \to L \quad \text{si y sólo si } X_1 \in S_0.$$

Observación 1. El Teorema 2 es válido sólo para sucesiones reales, puesto que no se puede demostrar la contenencia (17) para sucesiones de e-lementos complejos. Sin embargo, si se logra demostrar la contenencia (17) entonces se tiene tambien el teorema 2, como en los siguientes casos.

(i) Supongamos que las funciones f_n $(n \geq m)$ son uno a uno, sean

$$D = \{z \mid |z - L| \leq h_m\}, \qquad C = \{z \mid |z - L| = h_m\}$$

entonces $f_n(C)$ es una curva cerrada de Jordan. Si $z \in C$ entonces $|z - L| = h_m \geq h_n$ para $n \geq m$, y por (16):

$$|f_n(z) - L| > h_m,$$

luego el interior de la curva cerrada $f_n(C)$ contiene al círculo D, esto es:

$$f_n(D) \supseteq D \qquad \text{para} \qquad n \geq m.$$

(ii) Supongamos que las funciones f_n $(n \geq m)$ son *analiticas* en D. Si $z \in C$ entonces

$$|f(z) - L| > r \cdot h_m \geq r \cdot h_n \frac{r}{r-1} \cdot \epsilon_n > \epsilon_n \geq |f_n(z) - f(z)|.$$

Aplicando el teorema de Rouché, la ecuación $f_n(z) - L = (f_n(z) - f(z)) + (f(z) - L) = 0$ posee por lo menos, una raíz en el interior de la curva C, ya que $f(L) - L = 0$.

Para $w \in D$ y $z \in C$ tenemos de (16):

$$|f_n(z) - L| > h_m \geq |w - L|;$$

nuevamente aplicando el teorema de Rouché se ve que la ecuación

$$f_n(z) - w = (f_n(z) - L) + (L - w) = 0$$

tiene por lo menos, una raíz en el interior de D, esto es, $f_n(D) \supseteq D$.

Observación 2. Si las funciones f_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ son *monótonas* en $[a, b]$ o $\mathbb{R}$ entonces el conjunto S_0 es un intervalo cerrado de la forma $[p, q]$, o S_0 es un conjunto unitario.

Ejemplo 4. Sea (X_n) dada por $X_{n+1} = f_n(X_n)$, donde

$$f_n(x) = \begin{cases} 2x + 3(\frac{1}{2})^n & \text{si} \quad x \leq -(\frac{1}{2})^{n-1} \\ \frac{1}{2}x & \text{si} \quad -(\frac{1}{2})^{n-1} \leq x \leq 0 \\ 2x & \text{si} \quad 0 \leq x \end{cases}$$

Si $f(x) = 2x$, entonces :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 3(\frac{1}{2})^n \to 0,$$

luego $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente en $\mathbb{R}$.

Evidentemente 0 es el único punto fijo de la función límite $f(x)$ en $\mathbb{R}$, y $f'(0) = 2 > 1$. Tenemos :

$$f_n : [-(\frac{1}{2})^{n-1}, 0] \to [-(\frac{1}{2})^{n-1}, 0] \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \, ;$$

por lo tanto, si $X_1 \in [-1, 0]$ entonces $(X_n) \to 0$.

Si $X_1 > 0$, entonces $X_1 < X_2 < X_3 < \dots$, así$(X_n) \to +\infty$ monótonamente. Si

$$X_1 = -1 - (\frac{1}{2})^{2n-1},$$

entonces

$$X_2 = f_1(X_1) = -\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{2n-2},$$

$$X_3 = f_2(X_2) = -(\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^{2n-3},$$

$$\dots$$

Así

$$X_n = -(\frac{1}{2})^{n-1} - (\frac{1}{2})^n = -3(\frac{1}{2})^n,$$

$$X_{n+1} = f_n(-3(\frac{1}{2})^n) = -3(\frac{1}{2})^n = X_n \ ;$$

luego

$$X_n = X_{n+1} > X_{n+2} > X_{n+3} > \cdots \to -\infty \ .$$

Como $-1 = \sup_n(-1 - (\frac{1}{2})^{2n-1})$ tenemos:

$$\begin{aligned} (X_n) &\to +\infty \quad \text{si} \quad X_1 > 0, \\ (X_n) &\to 0 \quad \text{si} \quad X_1 \in [-1, 0], \\ (X_n) &\to -\infty \quad \text{si} \quad X_1 < -1 \ . \end{aligned}$$

O sea que el conjunto cerrado S_0 correspondiente al punto fijo 0 es:

$$S_0 = [-1, 0].$$

Ejemplo 5. Sea (X_n) dada por :

$$X_{n+1} = a_n(X_n)^2 \qquad (a_n > 0, \ \ a_n \to a > 0),$$

para $X_n > 0$ tenemos:

$$\log X_{n+1} = 2 \cdot \log X_n + \log a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \ .$$

Sea

$$p = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log a_k}{2^k} \ ;$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned} (\log X_n) &\to +\infty \quad \text{si} \quad \log X_1 > p, \\ (\log X_n) &\to -\log a \quad \text{si} \quad \log X_1 = p, \\ (\log X_n) &\to -\infty \quad \text{si} \quad \log X_1 < p. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $(X_n) > 0$ para $n = 2, 3, 4, \dots$ dado cualquier $X_1 \neq 0$, se obtiene que :

$$\begin{aligned} (X_n) &\to +\infty \quad \text{si} \quad |X_1| > e^p, \\ (X_n) &\to 1/a \quad \text{si} \quad |X_1| = e^p, \\ (X_n) &\to 0 \quad \text{si} \quad |X_1| < e^p. \end{aligned}$$

Sean $f_n(x) = a_n x^2$, $f(x) = ax^2$ en $\mathbb{R}$, entonces $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente en cualquier intervalo acotado. Los puntos fijos de la función $f(x)$ son 0 y $1/a$ y tenemos:

$$|f'(0)| = 0 < 1, \qquad f'(1/a) = 2 > 1.$$

Si A_0 es el conjunto abierto correspondiente al punto fijo 0 (según el Teorema 1), y S_0 es el conjunto cerrado correspondiente al punto fijo $1/a$ (según el Teorema 2), entonces

$$A_0 = (-e^p, e^p), \qquad S_0 = \{-e^p, e^p\}.$$

Ejemplo 6. Sea (X_n) dada por

$$X_{n+1} = \frac{a_n X_n}{X_n + b_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

donde $a_n \to a$, $b_n \to b$ con $|a| > |b|$. Tenemos:

$$\frac{1}{X_{n+1}} = \frac{b_n}{a_n} \cdot \frac{1}{X_n} + \frac{1}{a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

Como $b_n/a_n \to b/a$ y $|b/a| < 1$ entonces:

$$\frac{1}{X_n} \to \frac{1}{a-b} \qquad \text{para cualquier} \qquad \frac{1}{X_1},$$

o sea :

$$(X_n) \to a - b \qquad \text{cuando} \qquad X_1 \neq 0.$$

Se observa que si $X_1 = 0$ entonces $X_n = 0$ para todo n, luego (X_n) tiende a 0.

Sean $f_n(x) = \dfrac{a_n x}{x + b_n}$, $f(x) = \dfrac{ax}{x+b}$. La función $f(x)$ tiene dos puntos fijos: 0 y $a - b$; tenemos:

$$|f'(0)| = |\frac{a}{b}| > 1, \qquad |f'(a-b)| = |\frac{a}{b}| < 1.$$

Además $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente en una vecindad de 0, y en una vecindad de $a - b$. Si A_0 es el conjunto abierto correspondiente al punto fijo $a - b$, y S_0 es el conjunto cerrado correspondiente al punto fijo 0, entonces:

$$A_0 = \mathbb{R} - \{0\}, \qquad S_0 = \{0\}.$$

Conclusión. *Dada la fórmula de recurrencia* $X_{n+1} = f_n(X_n)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, *supongamos que* $f_n(x) \to f(x)$ *uniformemente y* L *es un punto fijo de la función límite* $f(x)$. *Si* $|f'(L)| < 1$ *entonces existen un número no contable de soluciones de la fórmula de recurrencia, convergentes al límite* L; *si* $|f'(L)| > 1$ *entonces existe, por lo menos, una solución de la fórmula de recurrencia convergente al límite* L.

Si $|f'(L)| = 1$, es posible que no exista solución convergente de la fórmula de recurrencia, como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7. Sea (X_n) dada por la fórmula de recurrencia,

$$f_n(x) = e^x - 1 + c_n, \qquad c_n \to 0.$$

Podemos observar que $f_n(x) \to f(x) = e^x - 1$ uniformemente en $\mathbb{R}$, y que 0 es el único punto fijo de la función $f(x)$. Además :

$$f'(0) = e^x \,|_{x=0} = 1.$$

Supongamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = +\infty, \qquad c_n > 0.$$

Como $e^x - 1 \geq x$ para todo x , entonces :

$$X_{n+1} = f_n(X_n) = e^{X_n} - 1 + c_n \geq X_n + c_n \qquad \text{para todo } n \ .$$

En la desigualdad anterior, tomando $n = m, m+1, \ldots, m+k$ y sumando:

$$X_{m+k+1} \geq X_m + \sum_{n=m}^{m+k} c_n = +\infty \ ;$$

por lo tanto, para cualquier m, tenemos

$$\text{lím}_{\ n\to\infty} X_n \geq X_m + \sum_{n=m}^{\infty} c_n = +\infty,$$

o sea, que la sucesión $(X_m, X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots)$ diverge hacia $+\infty$.

References

1. Apostol, T., *Mathematical Analysis*, Addisson Wesley, Reading, 1963.
2. Spivak, M., *Calculus*, 2^{nd} Ed., Addisson Wesley, Reading, 1980.

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Santafé de Bogotá - COLOMBIA