NOTA MATEMATICA

UNA OBSERVACION ELEMENTAL SOBRE POLINOMIOS

por

Carlos Lemoine

<u>Lema</u> :

Sea $P_{n+1}(x)$ un polinomio de grado $n+1$, sea h un número real fijo distinto de 0 , el $P_{n+1}(x+h) - P_{n+1}(x)$ es un polinomio de grado n.

Reciprocamente, sea $P_n(x)$ un polinomio de grado n , existe un polinomio de grado $n+1$, $P_{n+1}(x)$ tal que $P_{n+1}(x+h) - P_{n+1}(x) = P_n(x)$ para todo x , el polinomio $P_{n+1}(x)$ es único , a menos de una constante aditiva y sus coeficientes se obtienen a partir de los P_n y de h por la solución de $n+1$ ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es triangular.

La demostración del lema es inmediata, y sigue el mismo proceso que empleamos en el ejemplo de la aplicación siguiente:

Supongamos que tratamos de hallar la fórmula que nos de la suma de las cuatro(4) potencias de los números enteros; basta tomar en el ejemplo $h=1$ y $P_4(x) = (x+1)^4$, para ver que esta suma esta dada por un polinomio de 5 grado . $P_5(n) = a_5n^5 + a_4n^4 + \ldots + a_0$, $P_5(n)$ ha de satisfacer identicamente en n . la condición $P_5(n+1) - P_5(n) = (n+1)^4$, de donde se obtienen 5 ecuacines lineales:

$$5a_5 = 1$$

$$10a_5 + 4a_4 = 4$$

$$10a_5 + 6a_4 + 3a_3 = 6$$

$$5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 = 4$$

$$a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 1$$

cuyas **soluciones son:**

$$a_5 = \frac{1}{3} \qquad a_4 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \qquad a_2 = 0$$

$$a_1 = -\frac{1}{30}$$

Es claro que $a_0 = 0$ **puesto que** $P_5(0) = 0^4 = 0$