Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen XXVII (1993), págs. 131-135

DUALIDAD Y EXTENSIONES EN HOLOMORFÍA INFINITA

IGNACIO ZALDUENDO

Se presenta en esta breve nota un resumen de trabajo que el autor realiza actualmente con Jesús Ángel Jaramillo y Ángeles Prieto, ambos de la Universidad Complutense de Madrid, en el que se intentaclarificar la relación existente entre dualidad de los espaciosde funciones analíticas definidas sobre un espacio de Banach,y el "problema de extensión" de funciones analíticas en tales espacios. Más concretamente, se describe la extensión de Aron y Berner ([AB], [DG], [Z]) en términos de la transformada de Borel ([G], [D1]).

El autor desea agradecer a los organizadores del II Coloquio Latinoamericano de Análisis su hospitalidad durante su estancia en Santafé de Bogotá, y al árbitro por señalar un error en el texto original.

§1. INTRODUCCIÓN

Comenzamos por fijar la terminología y notación. E será siempre un espacio de Banach sobre el cuerpo complejo C, $L^k(E)$ el espacio de las formas k-lineales continuas sobre E, y $L_s^k(E)$ el subespacio de las que, además, son simétricas. Dada $\phi \in L^k(E)$, $P(x) = \phi(x, \ldots, x)$ define un polinomio homogéneo de grado k, $P : E \longrightarrow C$. Si ϕ es simétrica puede recuperarse ϕ de P a través de una fórmula de polarización. El espacio de tales polinomios se notará $P^k(E)$ y resulta ser isomorfo a $L_s^k(E)$ como espacio de Banach, las normas definidas poniendo $\|P\| = \sup\{|P(x)| : \|x\| \leq 1\}$ y $\|\phi\| = \sup \{|\phi(x_1, \cdots, x_k| : \|x_i\| \leq 1\}$.

Es fácil construir ejemplos de polinomios a partir de formas lineales: Si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in E'$, $P = \sum_{i=1}^n \gamma_i^k$ es un polinomio homogéneo de grado k. Un polinomio como éste se llama "de tipo finito". Ponemos $P \in P_f^k(E)$. Si (γ_i) es una sucesión acotada en E' y$a \in \ell^1$, $P = \sum_i a_i \gamma_i^k$ también es homogéneo de grado k. Un polinomio así se dice "nuclear". Ponemos $P \in P_N^k(E)$.

En algunos espacios, estos polinomios ni siquiera alcanzan para aproximar polinomios arbitrarios. Diremos que E tiene la propiedad de Littlewood-Bogdanowicz-Pelczynski (LBP) si todo polinomio puede aproximarse, uniformemente sobre acotados de E, mediante polinomios de tipo finito. Por ejemplo, los espacios c_0, ℓ^∞, y el espacio de Tsirelson tienen esta propiedad.

Una función f definida sobre un abierto U de E se dice analítica si puede expresarse localmente como una serie de polinomios $P_k \in P^k(E)$, es decir, dado $c \in U$,

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} P_k(x - c)$$

uniformemente en algún entorno de c. El supremo de los ρ tales que la serie converge uniformemente en $B(c, \rho)$ se llama radio de convergencia uniforme de f en c, y puede calcularse poniendo

$$r = \frac{1}{\limsup ||P_k||^{1/k}}$$

En un espacio de dimensión infinita existen siempre funciones enteras cuyo radio de convergencia es finito. Por ejemplo $f : c_0 \longrightarrow C$ dada por

$$f(x) = \sum_{k \geq 1} x_1 \cdots x_k$$

es una función de ese tipo. $f(\sum_{i=1}^{N} e_i) = N$, pero la serie no converge uniformemente en la bola unidad de c_0. Notemos que f no es acotada sobre dicha bola. Las funciones enteras acotadas sobre acotados tienen siempre radio de convergencia $r = \infty$. Se llaman de "tipo acotado" y forman una subálgebra propia del álgebra de todas las funciones analíticas sobre E. Cuando además cada P_k en la serie de f es nuclear, diremos que f es "nuclear de tipo acotado". Notaremos

$$H_{Nb}(E) \subset H_b(E) \subset H(E)$$

§2. Dualidad

En los años '50, Sebastião e Silva [SS] y Köthe [K] estudiaron el dual de $H(U)$ para $U \subset C_\infty$, la esfera de Riemann.Encontraron la dualidad con un álgebra de gérmenes de funciones analíticas $<,>: H(U) \times O_{U^c} \longrightarrow C$ (aquí U^c indica el complemento de U en la esfera de Riemann) dada por

$$< f, g >= \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) g(z) dz$$

donde Γ es cualquier curva alrededor de U^c contenida en el dominio de g. Si fijamos g, obtenemos $< , g > \in H(U)'$. Esto induce $L : O_{U^c} \longrightarrow H(U)'$, que resulta ser un isomorfismo, con lo cual el dual de $H(U)$ es presentado como un espacio de gérmenes de funciones analíticas. El inverso de L está "dado por" (en realidad es límite directo de morfismos) $B(\alpha)(w) = \alpha(f_w)$, donde $f_w(z) = \frac{1}{z-w}$. Notemos que ni la construcción de la integral ni la definición de morfismos como B puede realizarse si el cuerpo C es reemplazado por un espacio vectorial E.Pero volvamos a C y pensemos en otra versión de la misma dualidad, mirada a través de un cambio de variables. En lugar de U^c pongamos $(U^{-1})^c$ y $<,>: H(U) \times O_{(U^{-1})^c} \longrightarrow C$ dada por

$$< f,g >= \frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)g(1/z)}{z}dz$$

Así , la B que resulta es

$$B(\alpha)(w) = \alpha(f_w), \text{ donde } f_w(z) = \frac{1}{1-wz}$$

lo que sí puede generalizarse a E si estamos dispuestos a aceptar que $w \in E'$. En efecto, si f es analítica sobre U, pongamos $K = \{\gamma \in E' : |\gamma(x)| < 1 \text{ paratodo } x \in U\}$. Ahora para cada $\gamma \in K$ ponemos $f_\gamma(x) = \frac{1}{1-\gamma(x)}$, lo que induce

$$B : H(U)' \longrightarrow O_K \text{ dada por } B(\alpha)(\gamma) = \alpha(f_\gamma).$$

Esta es la transformada de Borel ([G], [D1]).No es en general un isomorfismo, pero sí permite caracterizar algunas subálgebras de $H(U)$ como gérmenes de funciones analíticas sobre E'. Por ejemplo, se tiene $H_{Nb}(E)' = O_0(E')$ (ver [G]).

§3. El problema de extensión

El problema fue planteado por Dineen [D2] hace unos veinte años, y puede presentarse de esta manera: dados espacios $E \subset G$, ¿Cuándo puede una (o cada) función analítica $f : E \longrightarrow C$, extenderse al espacio G de manera analítica? Se trata, entonces, de extender funciones definidas sobre subespacios, cosa que en dimensión infinita no siempre se puede hacer. En efecto, Josefson [J] ha demostrado que toda función analítica sobre ℓ^∞ es acotada sobre los acotados de c_0, de manera que ninguna función analítica sobre c_0 que no sea de tipo acotado (ya hemos visto un ejemplo) podrá extenderse a ℓ^∞. Presentaremos la extensión de Aron y Berner ([AB], [DG], [Z]),que permite extender toda función entera de tipo acotado al bidual del espacio en que estaba definida. Recordemos que puede escribirse $f = \sum_k P_k$, de manera que bastará extender cada polinomio homogéneo P_k e intentar sumar dichas extensiones. Para ello, tomemos $\phi \in L_s^k(E)$ y $z \in E''$. Podemos "bajar el grado" de ϕ así :

$$\tilde{z} : L_s^k(E) \longrightarrow L_s^{k-1}(E)$$

poniendo $\tilde{z}(\phi)(x_1, \ldots, x_{k-1}) = z(\phi_{x_1 \ldots x_{k-1}})$, donde en el segundo miembro hemos fijado $k-1$ variables. Ahora, si tenemos $z_1, \ldots, z_k \in E''$, aplicando $\tilde{z}_i$'s una tras otra, llegamos a $L_s^0(E) = C$, es decir $(\tilde{z}_1 \circ \cdots \circ \tilde{z}_k)(\phi) \in C$. Definiendo $\overline{\phi}(z_1, \ldots, z_k)$ como este número, tenemos una forma k-lineal continua $\overline{\phi}$, que extiende a ϕ. No tiene por qué ser simétrica, pero si $P(x) = \phi(x, \ldots, x)$, no hay ambiguedad al extender P poniendo $\overline{P}(z) = \overline{\phi}(z, \ldots, z)$. Luego si $f = \sum_k P_k$, ponemos $\overline{f} = \sum_k \overline{P_k}$. Puede verse que $\|\overline{P}\| = \|P\|$ [DG], de manera que el radio de convergencia de la serie extendida es igual al de la serie original. Se obtiene así

$$\beta : H_b(E) \longrightarrow H_b(E'') \text{ tal que } \beta(f) = \overline{f}$$

que es un morfismo de álgebras continuo para las topologías de convergencia uniforme sobre acotados. Hemos visto que no puede existir un morfismo de extensión de $H(E)$ en $H(E'')$, aunque sí es verdad que cada f analítica en E puede extenderse a un entorno de E en E'' que en general depende de f. El morfismo β tiene otras propiedades interesantes, y resulta estar ligado al producto de Arens y al cálculo funcional holomorfo para álgebras de Banach conmutativas [Z]. Pero aquí nos interesa su relación con la transformada de Borel.

§4. Extensión y dualidad

Comenzemos por señalar que $H_b(E)$ puede pensarse como el límite proyectivo de las álgebras $H^\infty(B_r)$ de funciones analíticas acotadas sobre bolas de radio r, a medida que $r \to \infty$. De esta manera, si α es una forma lineal sobre $H_b(E)$, α se factoriza a través de alguno de los $H^\infty(B_r)$. Ahora dados r y s con $rs < 1$, para $\alpha \in H^\infty(B_r)'$, definimos sobre B'_s (la bola de radio s de E') la función $B_{rs}(\alpha)$ mediante $B_{rs}(\alpha)(\gamma) = \alpha(f_\gamma)$, donde $f_\gamma(x) = \frac{1}{1-\gamma(x)}$. Resulta que $B_{rs}(\alpha) \in H^\infty(B'_s)$, con lo cual se obtiene cada vez que $rs < 1$,

$$B_{rs} : H^\infty(B_r)' \longrightarrow H^\infty(B'_s) \longrightarrow O_0(E')$$

(esta última, el álgebra de gérmenes de funciones analíticas en el orígen de E'). Al hacer crecer r,se obtiene

$$B_E : H_b(E)' \longrightarrow O_0(E')$$

De manera completamente análoga se tiene

$$B_{E'} : O_0(E')' \longrightarrow H_b(E'')$$

En algunos casos [G] B_E resulta un isomorfismo, tras lo cual pueden componerse los morfismos

$$H_b(E) \hookrightarrow H_b(E)'' \longleftrightarrow O_0(E')' \longrightarrow H_b(E'')$$

obteniéndose precisamente el morfismo de extensión de Aron y Berner. Es decir que $\beta = B_{E'} \circ (B'_E)^{-1}|_{H_b(E)}$. Son varias las preguntas que quedan por aclarar aún. Algunas de ellas: Cuando B_E no es un isomorfismo, ¿qué puede decirse de la relación entre dualidad y extensión? Tiene sentido pensar en otras transformadas de Borel, a partir de lo siguiente: si $h : \Omega \longrightarrow C$ (con Ω un abierto de C) es analítica, y dado $U \subset E$ ponemos $K_h = \{\gamma \in E' : \gamma(x) \in \Omega \text{ para todo } x \in U\}$, podemos definir $B(\alpha)(\gamma) = \alpha(f_\gamma)$, donde $f_\gamma(x) = h(\gamma(x))$. ¿Aparecen nuevas extensiones como consecuencia de estas nuevas transformadas? ¿Sirven estos morfismos de dualidad para aclarar la relación entre $H_b(E'')$ y $H_b(E)''$?

BIBLIOGRAFÍA

[AB]. R. Aron y P. Berner, *A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings*, Bull. Soc. Math. France **106** (1978), 3–24.

[D1]. S. Dineen, *Complex Analysis in Locally Convex Spaces.*, vol. North-Holland Math. Studies 57, 1981.

[D2]. S. Dineen, *Holomorphically Complete Locally Convex Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag.

[DG]. A. Davie y T. Gamelin, *A theorem on polynomial-star approximation*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), 351–356.

[G]. C. Gupta, *Malgrange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space. Notas de Matemática (IMPA) 37*, 1968.

[J]. B. Josefson, *Bounding subsets of $\ell^{\infty}(A)$*, J. Math. Pures Appl. **57** (1978), 397–421.

[K]. G. Köthe, *Dualität in der Funktionentheorie*, J. reine u. angew. Math. **191** (1953), 30–49.

[SS]. J. Sebastião e Silva, *As funções analíticas e a analíse funcional*, Portugal. Math. **9** (1950), 1–130.

[Z]. I. Zalduendo, *A canonical extension for analytic functions on Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **320(2)** (1990), 747–763.

UNIVERSIDAD DE SAN ANDRÉS, CC 1983, CORREO CENTRAL, (1000) BUENOS AIRES – ARGENTINA

E-mail: nacho@ udesa.edu.ar