NOTA SOBRE UN OPERADOR NO LINEAL EN UN ESPACIO DE HILBERT

por
YU TAKEUCHI

(I) Sea $\{\vec{\varphi}_i,\ i=1,2,3,\dots\}$ un sistema ortonormal completo en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$. Consideremos la siguiente transformación T :

$$T\Big(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \vec{\varphi}_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \vec{\varphi}_k \tag{1}$$

Evidentemente se obtiene:

$$\|\vec{\varphi}_k\| = 1, \quad T\vec{\varphi}_k = \frac{1}{k}\vec{\varphi}_k \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty) \tag{2}$$

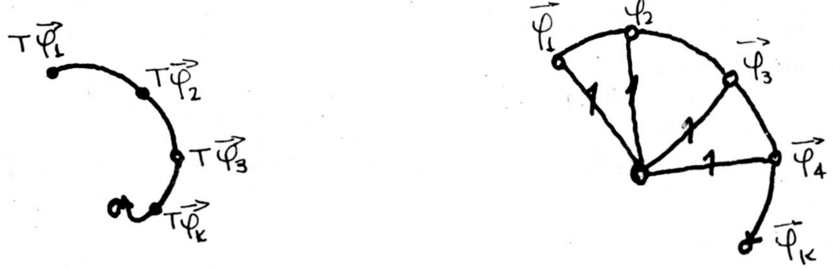

Fig. 1

Para $\vec{y} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\vec{\varphi}_k \in \mathfrak{H}$ no existe $\vec{x} \in \mathfrak{H}$ tal que $T\vec{x} = \vec{y}$, es decir, el recorrido de T no es igual a $\mathfrak{H}$. Pero el dominio de T es $\mathfrak{H}$, además T es lineal, acotada y la aplicación es uno a uno.

Más general, consideremos la siguiente transformación T :

$$T\Big(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \vec{\varphi}_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \vec{\varphi}_k \tag{3}$$

i) Si $\operatorname{Sup}|\lambda_k| < \infty$, entonces T es acotada.
ii) Si $\operatorname{Inf}|\lambda_k| > 0$, entonces existe T^{-1} y T^{-1} es acotada.
iii) Si $\operatorname{Inf}|\lambda_k| = 0$, entonces existe un sistema ortonormal de $\mathfrak{h}_\sigma$ (no siempre completo) tal que:

$$\|\vec{\psi}_k\| = 1,\ T\cdot\vec{\psi}_k \to 0,\ (k\to\infty) \text{ (para todo k)} \tag{4}$$

Ahora vamos a demostrar que el recorrido de T no es igual a $\mathfrak{h}_\sigma$. Para mayor facilidad suponemos:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \cdots \longrightarrow 0 \tag{5}$$

Sea

$$\vec{y} = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \vec{\varphi}_k \quad , \quad y_k = \sqrt{|\lambda_k| - |\lambda_{k+1}|} \; ; \tag{6}$$

entonces $\vec{y}$ pertenece a $\mathfrak{h}_\sigma$. Si $T\vec{x} = \vec{y}$, entonces tenemos:

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \vec{\varphi}_k \quad , \quad x_k = \frac{\sqrt{|\lambda_k| - |\lambda_{k+1}|}}{\lambda_k} . \tag{7}$$

Ahora tenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k| - |\lambda_{k+1}|}{|\lambda_k|^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|}\left\{1 - \frac{|\lambda_{k+1}|}{|\lambda_k|}\right\} \tag{8}$$

Si $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right| \neq 1$, entonces la serie (8) diverge.

Si $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right| = 1$, también la serie (8) es divergente ya que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k| - |\lambda_{k+1}|}{|\lambda_k|^2}\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{|\lambda_{k+1}|} - \frac{1}{|\lambda_k|}\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} - \frac{1}{|\lambda_1|} = \infty$$

Por lo tanto, $\vec{x} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \vec{\varphi}_k$ no pertenece a $\mathfrak{h}_\sigma$.

(II) <u>Transformación</u> <u>no</u>-<u>lineal</u> <u>acotada</u>.

i) Sea S un operador definido en una vecindad del origen que satisfaga la condición siguiente:
Dado ε existe δ tal que:

$$\|\vec{x}\|, \|\vec{x}_0\| < \delta \quad \text{implica} \quad \|S\cdot\vec{x} - S\vec{x}_0\| < \varepsilon\|\vec{x} - \vec{x}_0\| \tag{9}$$

El operador T :

$$T = T_0 + S \tag{10}$$

donde T_0 es un operador lineal acotado, se dice "<u>semi</u>- <u>analítico</u>" en el origen y el operador T_0 se llama la " <u>parte</u> <u>lineal</u> <u>de</u> <u>T</u>."
Evidentemente T es continuo y acotado en una vecindad del origen ya que:

$$\begin{aligned} \|T\vec{x} - T\vec{x}_0\| &= \|T_0(\vec{x}-\vec{x}_0) + Sx - Sx_0\| \\ &\leqslant \|T_0(\vec{x} - x_0)\| + \|S\vec{x} - Sx_0\| \leqslant (M+\varepsilon)\|\vec{x}-\vec{x}_0\| \end{aligned} \tag{11}$$

si $\vec{x}$, $\vec{x}_0$ $< \delta$, donde M es la cota del operador lineal T_0 .

ii) Si la parte lineal de T , T_0, tiene su inverso acotado entonces existe M' tal que:

$$M' \vec{x} \leqslant T_0\vec{x} \leqslant M \vec{x} \quad \text{(para todo } \vec{x}\text{)}. \tag{12}$$

De (9), tomando ε menor que M' , tenemos

$$\begin{aligned} T\vec{x} - T\vec{x}_0 &= T_0(\vec{x}-\vec{x}_0) + S\vec{x} - S\vec{x}_0 \\ &\geqslant T_0(\vec{x}-x_0) - S\vec{x} - S\vec{x}_0 \geqslant M'\,\vec{x}-\vec{x}_0 - \varepsilon\,\vec{x}-\vec{x}_0 \\ &= (M'-\varepsilon)\,\vec{x}-\vec{x}_0 \end{aligned} \tag{13}$$

si $\vec{x}$, $\vec{x}_0$ $< \delta$. De (13) tenemos:

$$T\vec{x} = T\vec{x}_0 \quad \text{implica} \quad \vec{x} = \vec{x}_0 \tag{14}$$

Por lo tanto existe el operador inverso de T , T^{-1} en una vecindad del origen.
Ahora demostramos que el dominio de T^{-1} contiene una vecindad del origen.

iii) Resolvemos la ecuación:

$$\vec{y} = T\vec{x} = T_0\vec{x} + S\vec{x} \tag{15}$$

para $\vec{y}$ dado. Sea

$$\vec{u} = T_0\vec{x} \qquad \text{ó} \qquad \vec{x} = T_0^{-1}\vec{u} \ ; \tag{16}$$

entonces tenemos:

$$\vec{y} = T_0 T_0^{-1}\vec{u} + S T_0^{-1}\vec{u} = \vec{u} + W\vec{u} . \tag{17}$$

El operador $W = S\,T_0^{-1}$ también satisface la condición (9) ya que T_0^{-1} es acotado, es decir, dado ε existe δ tal que

$$\|\vec{u}\|,\ \|\vec{u}_0\| < \delta \qquad \text{implica} \quad \|W\vec{u} - W\vec{u}_0\| < \varepsilon\|\vec{u} - \vec{u}_0\| . \tag{18}$$

Para resolver la ecuación (17) aplicamos el método de la aproximaciones sucesivas como sigue: Construimos la sucesión de elementos de $\mathfrak{h}_y$, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \cdots\}$ de la siguiente manera:

$$\vec{u}_1 = \vec{y} \qquad \text{(la primera aproximación)} \tag{19}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{y} - W\vec{u}_1 \qquad \text{(la segunda aproximación)}. \tag{20}$$

En general, la ($n + 1$)sima aproximación es:

$$\vec{u}_{n+1} = \vec{y} - W\vec{u}_n \ ; \tag{21}$$

entonces tenemos:

$$\|\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n\| = \|W\vec{u}_n - W\vec{u}_{n-1}\| . \tag{22}$$

En la condición (18) tomamos $\varepsilon = 1/2$, y suponemos que:

$$\|\vec{y}\| < \delta/2 \qquad (23)$$

Entonces se tiene:

$$\|\vec{u}_2 - \vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2 - \vec{y}\| = \|W\vec{y}\| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{2}$$

$$\|\vec{u}_2\| \leq \|\vec{u}_2 - \vec{y}\| + \|\vec{y}\| < \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\|\vec{u}_3 - \vec{u}_2\| = \|W(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)\| < \frac{1}{2}\|\vec{u}_2 - \vec{u}_1\| \leq \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{2^2}$$

$$\|\vec{u}_3\| \leq \|\vec{u}_3 - \vec{u}_2\| + \|\vec{u}_2\| < \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)$$

en general,

$$\|\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n\| < \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \qquad (24)$$

y

$$\|\vec{u}_{n+1}\| < \frac{\delta}{2}\left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right\} < \delta \, .$$

Es decir, $\|\vec{u}_n\| < \delta$ para todo n. De (22) y (24) tenemos:

$$\|\vec{u}_{n+k} - \vec{u}_n\| < \frac{\delta}{2}\left\{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+k-1}}\right\} < \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \delta = \frac{\delta}{2^n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Por lo tanto, la sucesión $\{\vec{u}_n\}$ es una sucesión de Cauchy, luego existe el límite:

$$\vec{u} = \lim_{n\to\infty} \vec{u}_n \, .$$

De (21), tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \vec{u}_{n+1} = \vec{y} - \lim_{n\to\infty} W\vec{u}_n \, .$$

De la continuidad del operador W se obtiene:

$$\vec{u} = \vec{y} - W\vec{u} \qquad \text{ó} \qquad \vec{y} = \vec{u} + W\vec{u}. \qquad (25)$$

Por consiguiente, $\vec{u} = \lim_{n\to\infty} \vec{u}_n$ es la solución de la ecuación (17).

Sea

$$\vec{u} = \vec{y} + V\vec{y} \, , \qquad (26)$$

entonces el dominio del operador V contiene la vecindad del origen de radio $\delta/2$

De (17) y (26) tenemos:

$$W\vec{u} = -V\vec{y} \tag{27}$$

De (13); (18) y (27) se puede demostrar inmediatamente que el operador V satisface la condición (9); entonces el operador $1 + V$ es <u>semianalítico</u>. Reemplazando (16) en (26) tenemos:

$$T_0\vec{x} = \vec{y} + V\vec{y}$$

ó (28)

$$\vec{x} = T_0^{-1}\vec{y} + T_0^{-1}V\vec{y}$$

Por lo tanto, el operador $T^{-1} = T_0^{-1} + T_0^{-1}V$ es <u>semianalítico</u>; entonces tenemos:

<u>TEOREMA 1.</u>

<u>El operador semianalítico T tiene su inverso semianalítico T^{-1} si la parte lineal T_0 tiene su inverso acotado.</u> Pero, aunque T_0 (la parte lineal del operador semianalítico T) no tenga la inversa acotada, el recorrido de T puede ser el espacio total h_2, lo cual es imposible para <u>operadores lineales</u>.(Compare con (I)).

<u>Ejemplo 1.</u>

$$\vec{y} = T\vec{x}; \quad y_K = \frac{1}{K}x_K + x_1 x_K \quad (K = 1,2,3,\dots) \tag{29}$$

Evidentemente el dominio de T es h_2 y además T es semianalítico ya que:

$$\sum_{K=1}^{\infty} |x_1 x_K - x_1^0 x_K^0|^2 = \sum_{K=1}^{\infty} |x_1 x_K - x_1^0 x_K + x_1^0 x_K - x_1^0 x_K^0|^2$$

$$\leq 2\left\{\sum_{K=1}^{\infty} |x_1 - x_1^0|^2 |x_K|^2 + \sum_{K=1}^{\infty} |x_1^0|^2 |x_K - x_K^0|^2\right.$$

$$\leq 2\left\{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|\,\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{x}_0\|^2\|\vec{x}_0\|^2\right\} = 2\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^2\left\{\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{x}_0\|^2\right\}$$

donde: $\vec{x} = \sum_{K=1}^{\infty} x_K \vec{\varphi}_K$, $\vec{x}_0 = \sum_{K=1}^{\infty} x_K^0 \vec{\varphi}_K$

La parte lineal de T no tiene la inversa acotada, sin embargo el recorrido de T es el espacio total h_y. El operador T no es uno a uno. A un elemento $\vec{y} = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \vec{\varphi}_k$, $(y_1 \neq 0)$, le corresponden dos elementos $x \in h_y$ tales que $T\vec{x} = \vec{y}$.
Si $y_1 = 0$ entonces a veces existe un solo elemento x tal que $T\vec{x} = \vec{y}$.

(III) Operador no lineal, no acotado.

Hay operadores no lineales cuyo comportamiento es muy especial, como se ve en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2.

Sea $\mathcal{L}_2(0,1)$ el espacio funcional en $[0, 1]$. El operador T :

$$T; \quad y(t) = Tx(t) = (x(t))^2 \tag{30}$$

no es lineal, no es acotado.

i) Sea

$$f_n(t) = \sqrt{n} \qquad t \in [0, 1/n]$$
$$= 0 \qquad t \in [1/n, 1]$$

entonces

$$\|f_n\| = 1, \quad \|Tf_n\| = \sqrt{n} \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

es decir, T no es acotado.

ii) Sea

$$g_n(t) = n^{1/3} \qquad t \in [0, 1/n]$$
$$= 0 \qquad t \in [1/n, 1]$$

entonces

$$\|g_n\| = n^{-1/6} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

$$\|Tg_n\| = n^{1/6} \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

iii)

Sea

$$h_n(t) = \frac{1}{n} \qquad t \in [0,1]$$

entonces:

$$\|h_n\| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

$$\|Th_n\| = \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

además:

$$\|Th_n\| / \|h_n\| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

es decir, T^{-1} no es acotado.

iv) $f(t) = t^{-1/4}$ pertenece a $\mathcal{L}_2$ pero $(f(t))^2 = t^{-1/2}$ no pertenece a $\mathcal{L}_2$, es decir, el dominio de T no es igual a $\mathcal{L}_2$.

R E F E R E N C I A S

[1] Stone, M.H.: Linear operator in a Hilbert Space, Amer. Math. Society, 1932.

[2] TAKEUCHI, Y.: Espacio de Hilbert, U.N., Bogotá, 1966

[3] NAKANO, HIDEGORO.: Espacio de Hilbert, Kyoritsu, Tokyo, 1948

[4] TAKEUCHI, Y.: Un sistema infinito de ecuaciones diferenciales, Rev. Soc. Mat. Japón, Vol. 3, No. 1, 1951

[5] TAKEUCHI, Y.: Un problema sobre un sistema infinito de ecuaciones, Rev. U. Ibaraki, Japón, Vol. 2, 1951

Departamento de Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia

Bogotá.

(Recibido el 14 de Enero de 1.966)

S U M M A R Y

Here we define an semi-analytic non linear operator in the follo-

wing way: $T = T_o + S$ where T_o ís a bounded linear operator and S a non linear operator continuos at the origen.
And then we construct an exemple of a semi-analytic non linear operator whose linear part has no bounded inverse and whose range is the whole space.