

DERIVABILIDAD DE FUNCIONES QUE SE ANULAN EN LOS NUMEROS IRRACIONALES

por
YU TAKEUCHI

INTRODUCCION

Sea $R = \{x_n, n=1,2,\dots\}$ el conjunto de todos los números racionales en $[0,1]$, y sea

$$\left. \begin{aligned} f(x_n) &= \frac{1}{n^2} & x_n \in R \\ f(x) &= 0 & x \notin R \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

entonces $f(x)$ es de variación acotada en $[0,1]$, por lo tanto es derivable en casi toda parte, independiente de la ordenación de los números racionales. Ahora definimos la siguiente función $g(x)$

$$\left. \begin{aligned} g(x_n) &= \frac{1}{n} & x_n \in R \\ g(x) &= 0 & x \notin R \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

en este caso la derivabilidad de $g(x)$ depende de la ordenación del conjunto R , es decir, existe una ordenación del conjunto R tal que $g(x)$ no es derivable en ninguna parte $[0,1]$, y también existe una ordenación del conjunto R tal que $g(x)$ es derivable en casi toda parte de $[0,1]$.

1.- Función de Variación Acotada que Toma Valor Nulo en los Números Irracionales.

Generalizando la función definida en (1), consideramos la siguiente función $f(x)$:

$$\left. \begin{aligned} f(x_n) &= \alpha_n > 0, & x_n &\in \mathbb{R} \\ f(x) &= 0, & x &\notin \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Para que $f(x)$ sea de variación acotada, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \quad (4)$$

debe converger. Se puede construir la segunda serie convergente.

(NOTA 1.) : $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ tal que [8]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0 \quad (5)$$

Sea

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} (x_k - \frac{1}{n} \beta_k, x_k + \frac{1}{n} \beta_k) \quad (6)$$

entonces:

$$m(A_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} 2\beta_k \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

luego, se tiene:

$$A_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \quad m(A_0) = 0 \quad (7)$$

Si $x_0 \notin A_0$ (evidentemente $x_0 =$ irracional), entonces existe n tal que $x_0 \notin A_n$, es decir,

$$x_0 \notin (x_k - \frac{1}{n} \beta_k, x_k + \frac{1}{n} \beta_k) \quad (\text{para todo } k)$$

ó,

$$|x_0 - x_k| \geq \frac{1}{n} \beta_k \quad (\text{para todo } k)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k}{|x_0 - x_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\beta_k}{|x_0 - x_k|} \frac{\alpha_k}{\beta_k}$$

$$\leq \lim_{k \rightarrow \infty} n \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) = 0$$

Es decir, $f(x)$ es derivable en x_0 y la derivada es cero. De (7) se tiene que $f(x)$, definida en (3), es derivable en casi toda parte de $[0,1]$ y su derivada es cero en casi toda parte. ($f(x)$ - es una función singular 3)

Se observa que la convergencia de la serie $\sum_n \alpha_n$ es indispensable para esta demostración, ó sea, la función f es necesariamente de variación acotada y que la ordenación de R no tiene importancia para la derivabilidad de la función f en tal caso.

NOTA 1.

Sea $\beta_n = \frac{\alpha_n}{\sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k}}$ (8) entonces evidentemente se tiene:

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Sean $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k$, $\delta_n = \sqrt{A_n} - \sqrt{A_{n+1}}$ entonces:

$$\frac{\beta_n}{\delta_n} = \frac{A_n - A_{n+1}}{\sqrt{A_n} (\sqrt{A_n} - \sqrt{A_{n+1}})} = \frac{\sqrt{A_n} + \sqrt{A_{n+1}}}{\sqrt{A_n}} = 1 + \sqrt{\frac{A_{n+1}}{A_n}} < 2$$

y,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{A_n} - \sqrt{A_{n+1}}) = \sqrt{A_1} < +\infty$$

por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ es convergente.

2.- La construcción de una Función No-derivable, de Variación No-acotada.

Ahora suponemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, (\alpha_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0) \quad (\text{Nota 2}) \quad (8)$$

(I) Primero, vamos a encontrar una ordenación de los números racionales, $R = \{x_n\}$, tal que

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} (x_k - \alpha_k, x_k + \alpha_k) = [0, 1] \quad (9)$$

$$6 \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n - \alpha_n, x_n + \alpha_n) = [0, 1] \quad [1], [2], [3].$$

De (8) existe una sucesión de los números naturales:

$$0 = N_0 < N_1 < N_2 < \dots < N_k < \dots \quad (10)$$

tal que

$$\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}-1} 2\alpha_n = \alpha_{n+1} > 1 \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (11)$$

Sea x_k ($1 \leq k \leq N_1-1$) un número racional tal que

$$i) \quad x_k \in \left(\frac{2\alpha_1 + \dots + 2\alpha_{k+1} + \alpha_k}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1-1}{\alpha_1} \alpha_k, \frac{2\alpha_1 + \dots + 2\alpha_{k-1} + \alpha_k}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1-1}{\alpha_1} \alpha_k \right)$$

$$ii) \quad x_k \notin \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$$

entonces el intervalo $(x_k - \alpha_k, x_k + \alpha_k)$ contiene al intervalo

$$\left[\frac{2(\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1})}{\alpha_1}, \frac{2(\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} + \alpha_k)}{\alpha_1} \right] \quad (\text{Ver Fig.1})$$

Por lo tanto tenemos:

$$\bigcup_{k=1}^{N_1-1} (x_k - \alpha_k, x_k + \alpha_k) \supset [0, 1] \quad (12)$$

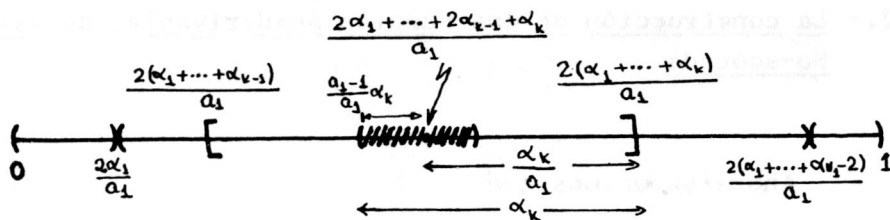


Fig. 1

De la misma manera, se pueden escoger los números racionales $(N_{k+1} \leq r \leq N_{k+1}-1)$ tales que

$$i) \bigcup_{n=N_{k+1}}^{N_{k+1}-1} (x_n - \alpha_n, x_n + \alpha_n) \supset [0, 1] \quad (13)$$

$$ii) x_n \notin \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$$

$$iii) x_n \text{ es diferente a } x_k \quad (k=1, 2, 3, \dots, n-1)$$

Los números racionales así escogidos forman un subconjunto propio de $\mathbb{R}$ (el conjunto de todos los racionales en $[0, 1]$), R_1 .

El conjunto $R - R_1$ es enumerable infinito, ó sea

$$R - R_1 = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$$

$$\text{Sean } x_{n_k} = \lambda_k \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

entonces, tenemos evidentemente que

$$R = R_1 \cup (R - R_1) = \{x_n, n=1, 2, 3, \dots\} \quad (14)$$

De (13) se tiene:

$$\bigcup_{n=m}^{\infty} (x_n - \alpha_n, x_n + \alpha_n) \quad (\text{para todo } m)$$

ó

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} (x_n - \alpha_n, x_n + \alpha_n) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} (x_n - \alpha_n, x_n + \alpha_n) = [0, 1] \quad (15)$$

puesto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

(II) Ahora definimos una función $g(x)$ como sigue:

$$\left. \begin{aligned} g(x_n) &= \alpha_n, & x_n &\in \mathbb{R} \\ g(x) &= 0, & x &\notin \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$g(x)$ no es de variación acotada puesto que $\sum \alpha_n = \infty$.

Para cualquier $x_0 \in [0, 1]$ existen $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$

tales que

$$x_0 \in (x_{m_i} - \alpha_{m_i}, x_{m_i} + \alpha_{m_i}) \quad (\text{para todo } i)$$

es decir,

$$|x_0 - x_{m_i}| < \alpha_{m_i} \quad (\text{para todo } i) \quad (17)$$

$$\text{además se tiene: } \lim_{m_i \rightarrow \infty} x_{m_i} = x_0, \quad (18)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{g(x_{m_i}) - g(x_0)}{x_{m_i} - x_0} \right| = \lim_{m_i \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{m_i}}{|x_{m_i} - x_0|} > 1 \quad (19)$$

Por lo tanto, $g(x)$ no es derivable en x_0 .

3. La Construcción de Una Función Derivable, de Variación No acotada.

(I) Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de números positivos tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \quad (\text{Nota 2}) \quad (20)$$

entonces, la sucesión $\{\beta_n = \sqrt{\alpha_n}, n=1, 2, 3, \dots\}$ cumple la relación siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n} \right) = \infty \quad (21)$$

Sea N_k un número positivo tal que
 $i > N_k$ implica $\beta_i < 1/2^k$ ($k=1,2,3,\dots$) (22)

Ahora recomendemos el conjunto $R = \{x_n\}$ en (el conjunto de todos los racionales en $[0,1]$) de la siguiente manera:

i) $y_i = x_i$ ($1 \leq i \leq N$)

ii) $\begin{cases} y_{N_1+1} = x_{N_1+1} \\ y_i \text{ } (N_1+1 < i \leq N_2) \text{ son números racionales tales que} \end{cases}$

$$|y_i - y_{N_1+1}| < 1/2$$

En general,

iii) $y_{N_k+1} = \text{El primer número racional diferente a } y_k$
 $(k=1,2,\dots,N_k) \text{ en la ordenación } \{x_n\}$

$y_i (N_k+1 < i \leq N_{k+1})$ son números racionales tales que

$$|y_i - y_{N_k+1}| < \frac{1}{2^k} \quad (24)$$

Evidentemente se tiene que $R = \{y_1, y_2, \dots\}$ y además:

$$\bigcup_{i=N_k+1}^{N_{k+1}} (y_i - \beta_i, y_i + \beta_i) \subset (y_{N_k+1} - \frac{1}{2^k}, y_{N_k+1} + \frac{1}{2^k})$$

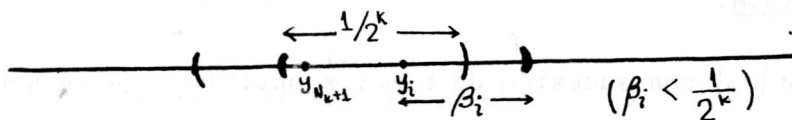


Fig. 2

Por lo tanto se tiene:

$$\bigcup_{i=N_k+1}^{\infty} (y_i - \beta_i, y_i + \beta_i) \subset \bigcup_{j=k}^{\infty} (y_{N_j+1} - \frac{1}{2^{j-1}}, y_{N_j+1} + \frac{1}{2^{j-1}})$$

entonces:

$$m\left(\bigcup_{i=N_k+1}^{\infty} (y_i - \beta_i, y_i + \beta_i)\right) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{2}{2^{j-1}} = \frac{1}{2^{k-3}}$$

es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m \left(\bigcup_{i=k}^{\infty} (y_i - \beta_i, y_i + \beta_i) \right) = 0 \quad (26)$$

Sea

$$A_0 = \overline{\lim_{i \rightarrow \infty}} (y_i - \beta_i, y_i + \beta_i) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} (y_i - \beta_i, y_i + \beta_i)$$

entonces, de (26) se obtiene:

$$m(A_0) = 0 \quad (27)$$

(II) Ahora, definimos una función $g(x)$ como sigue:

$$\left. \begin{aligned} g(y_n) &= \alpha_n & (y_n \in R) \\ g(x) &= 0 & (x \notin R) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Si x_0 (irracional) $\notin A_0$, entonces existe m tal que

$$x_0 \notin (y_i - \beta_i, y_i + \beta_i) \quad (\text{para todo } i \geq m)$$

es decir,

$$|x_0 - y_i| \geq \beta_i$$

Por lo tanto se tiene:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{g(y_i) - g(x_0)}{y_i - x_0} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\alpha_i}{|y_i - x_0|} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\beta_i}{|y_i - x_0|} \frac{\alpha_i}{\beta_i} = 0$$

Es decir, $g(x)$ es derivable en $x = x_0$ (irracional) $\notin A_0$ entonces $g(x)$ es derivable en casi toda parte de $[0, 1]$.

NOTA 2.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, entonces la función definida en (3) es continua en cualquier punto irracional (independiente de la ordenación de los números racionales.) [3],[4]

REFERENCIAS

- [1] MUNROE, M.E. : Introduction to Measure and Integration, Addison - Wesley, Reading, 1953.
- [2] KESTELMAN, H. : Modern Theory of Integration, Dover, New York, 1960.
- [3] TAKEUCHI, YU. : Integrales de Riemann y de Lebesgue, U. N., Bogotá, 1966.
- [4] APOSTOL, T.M. : Mathematical Analysis, Addison Wesley, Reading, 1957
- [5] HOBSON, W.E. : The Theory of functions of a real variable, Dover, New York, 1927.
- [6] TAKEUCHI, YU. : Un Conjunto no Enumerable de Medida Nula, Rev. de Matemáticas elementales, Vol. VI, Fasc. 1-2 (64).
- [7] ----- : Una serie infinita relacionada con el conjunto de los números racionales, Rev. Mat. Elementales, Vol. VII, Fasc. 2 (65)
- [8] ----- : Un criterio sobre la convergencia de la integral impropia, Rev. Mat. Elementales, Vol VIII , Fasc. 1 (66)

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D. E.

(Recibido el 14 de Mayo de 1966)

SUMMARY

In this paper we define the function

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_n > 0, & \text{if } x = x_n \in R \\ 0, & \text{if } x \notin R. \end{cases}$$

(R is the set of rational numbers in the interval $[0,1]$). It is shown then that f is a function of bounded variation if $\sum_n \alpha_n$ converges, and therefore f is derivable everywhere and that its derivability is independent of R ordering. If $\sum_n \alpha_n$ diverges (to infinity), we show the existence of an ordering on R such that f is derivable (resp. not derivable) almost everywhere (resp. nowhere).